SuperKEKB のマシンパラメータ　～ナノビーム方式と低エミッタンス

1. はじめに

KEKB の運転は 2010 年 6 月 30 日の朝、終了した。運転開始は 1998 年の 12 月であったので、約 10 年半の運転であった。この間、KEKB 加速器は SLAC の PEP-II との熾烈な競争に打ち勝って、世界最高のルミノシティを達成した。ピークルミノシティ 2.11×10^{34} cm^{-2} s^{-1} と Belle 検出器が取得した積分ルミノシティ 1041 fb^{-1} は、現在も世界記録として輝いている。一方、Belle 実験の方は、B 中間子系の CP 対称性の破れを検出したが、この実験結果は 2008 年の小林、益川両氏のノーベル物理学賞受賞に貢献した。これ以外にも、Belle 実験は数々の成果を上げている。

この KEKB の成功に基づいて、KEKB を SuperKEKB に改造するプロジェクトが進行中で、既にその建設が始まっている。予算規模は、約 300 億円で、2014 年の後半に運転開始の予定である。SuperKEKB では、KEKB で達成された世界記録の約４０倍のピークルミノシティ $8\times10^{35}cm^{-2}$ s^{-1} を目指している。Belle 検出器も Belle II へとアップグレードされる。実験としては、小林益川理論も含まれる素粒子理論の標準モデルでは説明できない現象の発見を目的としている。

この講義では、SuperKEKB プロジェクトの全容を扱うことではできないが、どうやってルミノシティを上げようとしているのかというアイデアと、設計上のいくつかのポイント、特に低エミッタンスビームを得る方法について解説する。また、SuperKEKB の設計パラメータがどうやって決まっているかについても述べる。

本講義では、ビーム力学の基礎は一応理解しているものと仮定している。ベータトロン振動やシンクロトロン振動などの基礎的な知識を身につけたい学習者は、参考文献 [1]、[2]などを参照していただきたい。

2. Nano Beam scheme

2.1 ルミノシティの公式

SuperKEKB のルミノシティを KEKB に比べて大幅に上げるためのアイデアの一つが、Nano Beam scheme（ナノビーム方式）である。このアイデアは、イタリアの Frascati 研究所の P. Raimondi 氏によって、イタリアの SuperB 計画（SuperKEKB とよく似た計画である）に対して提唱された[3]ものであり、KEK でも採用している。この方式について述べる前に、まずルミノシティがどういうパラメータで決まるかについて、復習しておこう。

まず、高エネルギー実験（特に精密実験）においてルミノシティが重要なのは、素粒子反応が起きる頻度がルミノシティに比例するからである。すなわち、

$$E_{ev} = L\cdot\sigma \qquad (2\text{-}1)$$

となる。ここで、E_{ev} は、ある素粒子反応（例えば B 中間子が生成されるという反応）が起きる頻度（単位時間内に何回起きるか）であり、σはその素粒子反応の断面積である。断面積は、反応の起こりやすさを表す量であるが、直感的には粒子と粒子（SuperKEKB の場合は電子と陽電子）がすれ違うときに、どれぐらい近くを通れば反応が起きるかといういわば的の大きさと考えればイメージがつかめる。的の大きさであるから、この量の単位は面積になる。最後に、L がルミノシティである。単位は以上述べたことから分かるように、（／面積／時間）になる。慣例上、ルミノシティの単位は cm^{-2} s^{-1} に取る。ここで重要なことは、素粒子反応の断面積は自然法則で決まっていて人間の努力では変えられないのに対して、ルミノシティの方は人間の努力で高めることができるということである。このように、精密実験では、ルミノシティを出来るだけ高くして、よりたくさんの素粒子反応を起こし、統計を稼ぐことが非常に重要である。

次にルミノシティが加速器のパラメータを用いて、どのように表されるかを考えよう。まず簡単のために、断面積が長方形のビーム同士の衝突を考えよう（Fig. 1）。ビームは断面形状が水平方向に L_x、垂直方向に L_y（断面積 S）の長方形で、長さ L_z の塊（バンチ）としよう。このバンチの中に電子が N_-個、陽電子が N_+個含まれるが、簡単

のため、バンチ内に一様に分布しているとしよう。また、ここでは衝突の間に二つのバンチの形状は変化しないと仮定する。このとき、例えば一個の陽電子に乗って電子のバンチとすれ違うと考えてみよう。反応断面積σのある素粒子反応を考えると、一個一個の電子の的の大きさがσと考えられるので、ビームの断面積 S（$=L_x \times L_y$）に対して、的の大きさの総計は $N_- \times \sigma$となる。従って、この一個の陽電子が電子のバンチとすれ違うときにこの素粒子反応が起きる確率は、$(N_- \times \sigma)/S$となる。これは陽電子一個についてであったが、陽電子全体について考えると、この N_+倍になる。つまり、電子と陽電子のバンチ同士が一回すれ違うときに、この素粒子反応が起きる回数の期待値は$(N_- \times N_+ \times \sigma)/S$となる。以上は、バンチ同士の一度のすれ違いについてであったが、単位時間にこのようなすれ違い（衝突）が f回起こるとすると、単位時間にこの素粒子反応が起きる回数は、この f倍になる。以上のことから、この場合のルミノシティは、

$$L = \frac{N_- N_+}{L_x L_y} f \qquad (2\text{-}2)$$

となる。この場合は、ルミノシティはバンチの長さ L_zには依らない。

(問：式(2-2)を示せ。)

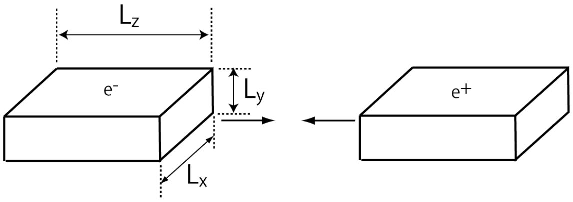

Fig. 1: 直方体バンチの衝突

以上は、ビームの断面積が長方形で、粒子分布は一様の場合であったが、実際のビームの分布は水平、垂直両方向にガウス分布（正規分布）である。この場合のルミノシティは(2-2)を導出した考え方を用いて、無限小の矩形領域 $dx\,dy$ とその領域における粒子の分布関数を用いて、x-y 平面で積分することにより、次のルミノシティの公式を得る。

$$L = \frac{N_- N_+}{4\pi \sigma_x^* \sigma_y^*} f \qquad (2\text{-}3)$$

ここで、σ_x^*, σ_y^*は衝突点での水平、垂直方向のビームサイズで、ガウス分布の標準偏差であり、電子と陽電子のビームサイズは等しいと仮定した。

(問：式(2-3)を示せ。)

電子と陽電子のビームサイズが異なる場合は、より一般的な式

$$L = \frac{N_- N_+}{2\pi \sqrt{\sigma_{x+}^{*2} + \sigma_{x-}^{*2}} \sqrt{\sigma_{y+}^{*2} + \sigma_{y-}^{*2}}} f \qquad (2\text{-}4)$$

を使う必要がある。

2.2 ビーム・ビーム効果

(2-3)もよく使われるルミノシティの式であるが、もう一つビーム・ビームパラメータを用いた別の公式もよく用いられるので、次にそれを説明する。その前にまず、ビーム・ビーム力とその効果について説明する必要がある。この講義ではビーム・ビーム効果については、深くは立ち入らないが、必要最小限のことだけは述べておく。ビーム・ビーム力は相手のビームと衝突点付近ですれ違う時に感じる電磁力である。すれ違い（衝突）は一瞬であるが、その効果はかなり大きい。これに対して、ある粒子が自分の属するバンチ全体から感じる電磁力（space charge 力という）は、高エネルギーでは非常に小さい。これは、平行して同じ方向に走っている二つの粒子の電磁力は、光速の極限ではゼロになるからである。これは一方の粒子が作る磁場による力と電場による力は大きさがほぼ同じで、符号が逆なのでキャンセルするからである（但し、バンチ内の二つの粒子がある程度以上近づくと大きくクーロン散乱されてエネルギーが変化し、失われてしまう場合もある。これを Touschek 効果という）。ところが、逆向きに走る粒子同士の場合、磁場による力と電場による力がキャンセルせずに足し合わせになる

ので、相手のバンチ全体から感じる力は、大きな力になるのである。このようなビーム・ビーム力は、ほぼ水平、垂直方向の力、すなわち transverse 方向の力であり、ビームの進行方向の力（これは主にエネルギー変化になる）は小さい。Fig. 2 にビーム・ビーム力の例を示す。この例は、水平方向の力であるが、垂直方向の力も似たような形状になる。この力は、片方のビームのある粒子が相手のバンチと衝突点で一回すれ違うときに受ける、水平方向の力である。バンチは進行方向に長さを持っているので、力を受けるのは衝突点の“点”ではなく、ある長さを持つ“線”になるが、ここではその線に沿って積分した力と考えれば良い。この力は、力を受ける粒子の水平方向の角度変化（蹴り角）で表される。この力は、相手のバンチの多数の粒子の電磁場の平均（平均場）を表している。相手のバンチの個々の粒子と非常に近づいた場合は、散乱されたり、素粒子反応が起きたりして、その粒子がビームから失われることも起きるが、その確率は比較的小さく、ほとんどの場合は、この平均場を感じるだけで相手のバンチとすれ違う。

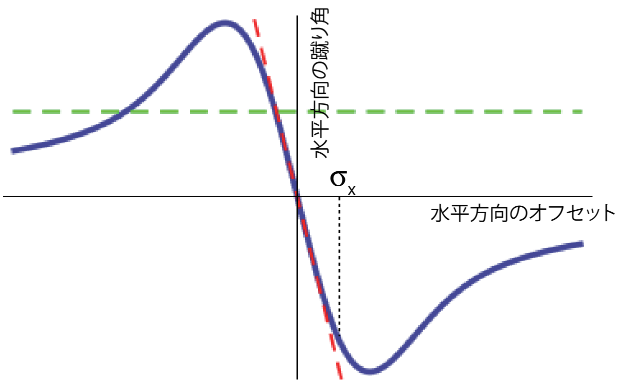

Fig. 2: 水平方向のビーム・ビーム力。比較のために、四極電磁石による力（赤い点線）と二極電磁石による力（緑の点線）も表示されている。

Fig.2 で注意すべきことがいくつかある。まず、蹴り角は原点で力がゼロになっているが、これは相手のビーム中心では対称性から言ってゼロになることは、容易に理解できる。また、横軸は相手のビーム中心からはかった水平方向のずれであるが、プラス（マイナス）方向にずれると力は負（正）で、蹴り戻す方向に力が働く。つまり、この場合のビーム・ビーム力は引力になっている。これは、SuperKEKB のように衝突するビームの電荷が逆の場合に対応する。陽子と陽子の衝突の場合のように電荷が同じ場合は、斥力になる。Fig. 2 から分かるように、ビーム・ビーム力は原点付近では直線に近い。つまり、原点付近（大まかに言ってビームサイズの大きさσ_x 程度まで）では四極電磁石による力で近似できる。符号から言って、その力は収束力である。但し、四極磁石の場合は、水平方向に収束力の場合は、垂直方向には発散力になるが、ビーム・ビーム力の場合は、水平、垂直の両方向とも収束力（SuperKEKB の場合）または、発散力（LHC などの場合）となることに注意しよう。さて、ビーム・ビーム力は4極電磁石の力で近似されるが、4極電磁石が存在すると、よく知られているようにベータトロン振動数（チューン）の変化が生じる。SuperKEKB の場合、ビーム・ビーム力は収束力であるので、水平、垂直の両方向とも、チューンは上がる方向に変化する。垂直方向のチューンの変化量は以下の式で表される。

$$\xi_{y\pm} = \frac{r_e}{2\pi\gamma_\pm} \frac{\beta^*_{y\pm} N_\mp}{\sigma^*_{y\mp}\left(\sigma^*_{x\mp} + \sigma^*_{y\mp}\right)} \qquad (2\text{-}5)$$

ここで、ξ_y はビーム・ビームチューンシフト、またはビーム・ビームパラメータと呼ばれる。r_e は電子古典半径、γはローレンツファクター、β_y は垂直方向のベータ関数を表す。添字の+と-は陽電子、または電子の値であることを表す。また、*は衝突点での値であることを示している。Fig. 2 でもう一つ重要なことは、原点付近では力が収束力で近似されるが、原点から遠ざかると直線からずれ、非常に非線形であることである。この非線形性などのよって、バンチ電流が増えてくると、ビームサイズが垂直（または水平）方向に増大する現象がよく起こる。この時、(2-5)のビーム・ビームパラメータを衝突する相手ビームのバンチの粒子数 N の関数で書くと、Fig. 3 のようになる。

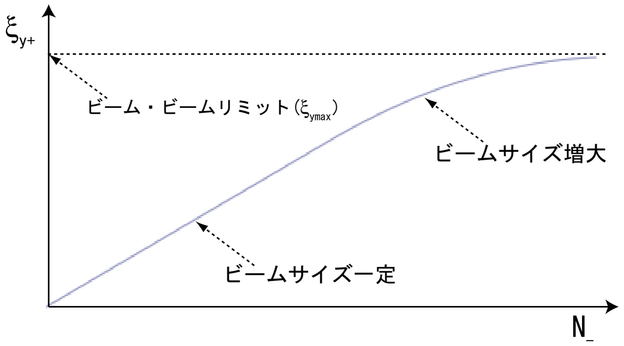

Fig. 3: 衝突する相手のバンチの粒子数の関数としてのビーム・ ビームパラメータの模式図

Fig.3 から分かるように、衝突する相手のバンチの粒子数（バンチ電流）が少ない（低い）間は、ビーム・ビームパラメータは、粒子数に比例して増える。しかし、この粒子数（バンチ電流）が増えてくると、ビーム・ビーム効果によりビームサイズが増え始めて、ビーム・ビームパラメータの増え方が鈍ってくる。そして、経験上、ある値以上には上がらなくなる。このビーム・ビームパラメータに上限がある現象をビーム・ビームリミットという。ここで、一つ重要なことは、(2-5)式のビームサイズは、相手のビームサイズであることである。ここでは、両方のバンチの粒子数（バンチ電流）を比例して増やしていき、両方のビームのビームサイズがともに増大していくことを、暗黙のうちに仮定している。ビーム・ビームパラメータの最大値は、電子、陽電子のコライダーの場合は、経験的に大体 0.02~0.1 ぐらいの間に入っているようである。また、このビーム・ビームパラメータは、マシンのさまざまなチューニングで、ある程度改善することも経験的に分かっている。実際、KEKB におけるビーム・ビームパラメータは最終的にクラブ空洞も用いて、0.09 程度まで増えたが、この高い値はビーム軌道の微妙な調整などを２４時間体制でずっと続けた成果である。

　このように、ビーム・ビーム効果は、一般にルミノシティの強い制限要因であるので、このビーム・ビームパラメータを用いたルミノシティの表式もよく用いられる。以下では、二つのビームの衝突点でのビームサイズが、水平、垂直の両方向とも等しいと仮定する。実際のマシンでは、この仮定は成り立たないことも多いが、簡単のためにこう仮定しよう。ビーム・ビームパラメータの式(2-5)を見ると、ルミノシティの式(2-3)と少し似ていることが分かる。通常、水平方向のビームサイズは、垂直方向よりずっと大きいので、(2-5)はビームの断面積の逆数にほぼ比例する。従って、ビーム・ビームパラメータを見ると、ルミノシティが推定できる。実際、KEKB の前身の TRISTAN では、ルミノシティを素早く推定するためにこのビーム・ビームパラメータの測定値が用いられ、マシンのチューニングに生かされた。(2-5)と(2-3)より、ルミノシティのもう一つの公式が得られる。

$$L = \frac{\gamma_{\pm}}{2er_e}\left(1+a\right)\frac{\xi_{y\pm}I_{\pm}}{\beta^*_{y\pm}} \qquad (2\text{-}6)$$

ここで、a は、衝突点での垂直、水平方向のビームサイズの比で、通常１に比べて非常に小さい。また、I はビームの全電流で $I=Nef$ の関係がある。複合は同順に取る。ルミノシティは電子のパラメータと陽電子のパラメータの二通りで記述されるが、ビームサイズが等しいという仮定が成り立てば、どちらのビームのパラメータセットを用いても正しいルミノシティを与える。(2-6)式は、衝突型加速器のルミノシティの基本式で、ルミノシティがほぼ３つのパラメータ、（１）ビーム電流、（２）ビーム・ビームパラメータ、（３）衝突点の垂直方向ベータ関数、だけで決まってしまうことを表している。

（問：両ビームの衝突点でのビームサイズが等しいと仮定して(2-6)を導け。）

　式(2-6)を見ると、ビーム・ビームパラメータがビーム電流に比例して増える領域では、ルミノシティはビーム電流の自乗に比例して増えることが分かる。また、ビーム・ビームパラメータが最大値に達して一定になっても、ビーム電流を増やすと、電流に比例してルミノシティが増え続けることも分かる。また、(2-6)はローレンツファクターを含んでいるので、ビームエネルギーが高いほ

どルミノシティが高くなる傾向があることも分かる。式(2.3)にはエネルギーは含まれないのに、このエネルギー依存性はどこからくるのであろうか？これは、もちろんビーム・ビーム効果に由来する。式(2-5)の分母にローレンツファクターが入っているので、エネルギーが高いほど、相手ビームの電流値が増えてもビーム・ビームパラメータは増えにくい。従って、エネルギーが違っても同じぐらいのビーム・ビームパラメータでビームサイズの増大が起こり始めると仮定すると、エネルギーが高いほど、ビームサイズの増大が起こりにくく、ルミノシティが上がりやすい。実際、電子、陽電子のコライダーの歴史を見ると、エネルギーが高いマシンほどルミノシティが高くなる傾向があることが分かるが、その理由の一つは、このビーム・ビーム効果にある。次に重要なことは、ビーム・ビームパラメータが（マシンや他のパラメータによらないと仮定すると）ルミノシティは衝突点の垂直方向のベータ関数（β_y^*）に逆比例することである。β_y^*を小さくすると、衝突点でのビームサイズが小さくなり、(2-3)よりルミノシティが上がりそうなことは分かる。しかし、衝突点でのビームサイズは、

$$\sigma_y^* = \sqrt{\beta_y^* \varepsilon_y} \tag{2-7}$$

と表され、ベータ関数とエミッタンスの積の平方根になる。しかし、(2-3)にはベータ関数は現れるが、エミッタンスは現れない。何故このような違いがあるのだろうか？実は、この違いもビーム・ビーム効果にある。垂直方向のエミッタンスを小さくすることによってルミノシティを上げようとすると、(2-5)式のビーム・ビームパラメータは大きくなってしまうのに対して、垂直方向のベータ関数を小さくすると、ビームサイズは小さくなるが、分子にベータ関数があるので、ビーム・ビームパラメータはかえって小さくなる。この時、水平方向のベータ関数も垂直方向と同じ割合で小さくすると、ビーム・ビームパラメータはベータ関数を小さくする（絞る）前と変わらない。従って、ビーム・ビームパラメータが一定と言う条件下では垂直方向（場合によっては水平方向も）のベータ関数をどんどん小さくすることによって、ルミノシティが上がっていく。このように、ビーム・ビーム効果が支配的な場合には、衝突点のベータ関数を絞ることがルミノシティを上げる常套手段であり、LHC も含めて多くの衝突型加速器で用いられる手段である。このように、(2-6)式を用いることにより、(2-3)を見ていたのでは分からなかったいろいろなことが分かってくる。

（問：2-6 に水平方向のベータ関数が入っていない理由を考えよ。）

2.3 Hourglass（砂時計）効果

前節で、衝突点のベータ関数（特に垂直方向）を絞ることがルミノシティを上げる常套手段だと述べたが、その限界は何で決まるのであろうか？その限界を与える効果は一つとは限らないが、中でも非常に重要なものに hourglass（砂時計）効果と呼ばれるものがある。この効果は、簡単に言ってしまうと、ベータ関数の衝突点での値を絞って小さくしても、バンチは有限の長さを持っているので、ビームの衝突も点ではなくバンチ長程度の長さを持った線になるが、この範囲内で、ベータ関数が広がってしまうという効果である。よく知られているように、衝突点付近でベータ関数は、衝突点からの距離 s の関数で、

$$\beta_y(s) = \beta_y^* + \frac{s^2}{\beta_y^*} \tag{2-8}$$

と表される。これは垂直方向であるが、もちろん水平方向も同様の式で表される。いま、β_y^*がバンチ長 σ_z（ガウス分布の標準偏差）と等しいとすると、衝突点からバンチ長離れた場所でベータ関数は２倍になってしまう。もちろん、ベータ関数をさらに絞れば、Fig. 4 のようにバンチ長程度の範囲内でのベータ関数の拡がりはさらに大きくなる。

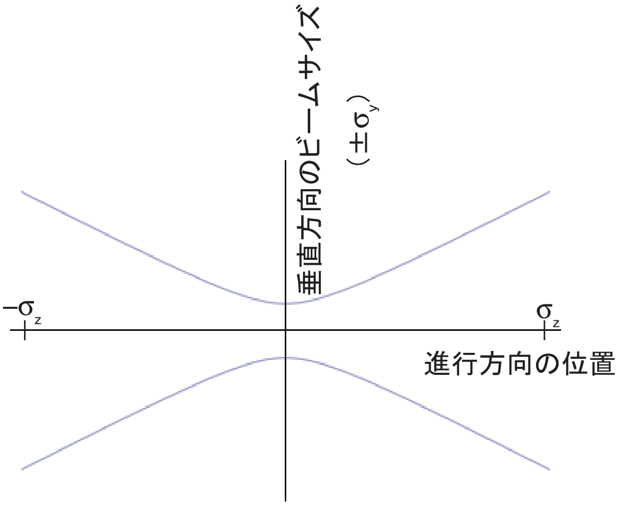

Fig. 4: ベータ関数をバンチ長よりさらに絞った場合のビームサイズ。Hourglass 効果を示す。

この例では、垂直方向のベータ関数をバンチ長の 1/5 程度まで絞っている。このビームサイズの図が、砂時計（を寝かしたもの）に似ているため、このようにバンチ長程度で、ビームサイズが広がってしまう現象を hourglass（砂時計）効果と呼ぶ。Fig.4 のような状況になると、ベータ関数を絞ってもルミノシティは上がらない。ルミノシティが上がらない理由は、ベータ関数が(2-8)のように変わることによって、(2-7)で計算されるビームサイズが衝突領域にそって大きくなってしまうことに加えて、相手のバンチとすれ違う場所のベータ関数が大きくなることにより、ビーム・ビーム効果によりビームサイズの更なる増大が起きやすくなることにもよる。前者のビームサイズの余分な増大にはよらないルミノシティの低下を、ルミノシティの geometrical loss（幾何学的ロス）と呼ぶ。この geometrical loss には、この hourglass 効果によるものに加えて、交差角衝突によるすれ違いに起因するものもある。これらの効果を加えると、ルミノシティの公式(2-3)は次のように書き換えられる。

$$L = \frac{N_- N_+}{4\pi\sigma_x^* \sigma_y^*} f R_L \qquad (2\text{-}9)$$

ここで、R_L がこれら二つの効果を合わせたルミノシティの geometrical loss を表すファクターである。このように、hourglass 効果と交差角衝突でルミノシティの公式が変更を受けるが、同様にビーム・ビームパラメータの(2-5)式も変更の必要があり、

$$\xi_{y\pm} = \frac{r_e}{2\pi\gamma_\pm} \frac{\beta_{y\pm}^* N_\mp}{\sigma_{y\mp}^* \left(\sigma_{x\mp}^* + \sigma_{y\mp}^*\right)} R_{\xi\pm} \qquad (2\text{-}10)$$

となる。ここで R_ξ がビーム・ビームパラメータの geometrical factor であるが、この場合、hourglass 効果によって、ビーム・ビームパラメータは大きくなり、交差角衝突によっては小さくなることに注意する必要がある。これらのことから、ルミノシティを表すもう一つの公式 (2-6)も変更され、

$$L = \frac{\gamma_\pm}{2er_e}\left(1+a\right)\frac{\xi_{y\pm} I_\pm}{\beta_{y\pm}^*}\frac{R_L}{R_\xi} \qquad (2\text{-}11)$$

となる。

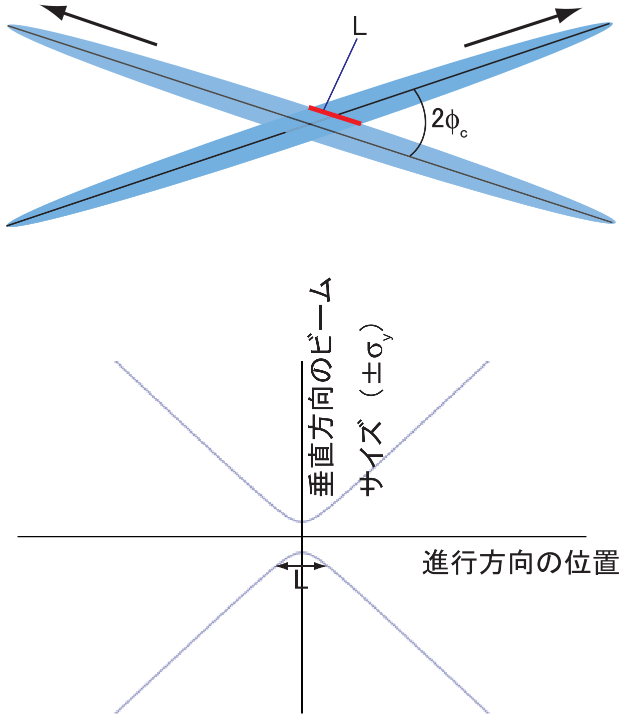

Fig. 5: Nano Beam scheme 概念図

以上述べたように、hourglass 効果はルミノシティの大きな制限要因である。通常の正面衝突の場合、垂直方向のベータ関数を絞ってルミノシテ

ィが上がるのはその値がバンチ長（σ_z）程度までとされている。これは、シミュレーションや実験に基づくものであるが、実際、KEKB でもそうなっていることが確かめられた。この程度までであれば、R_L や R_ξ はそれほど大きなファクターではなく、せいぜい１～２割ぐらいの変更を与えるファクターであり、粗い議論の場合は無視することもある。

2.4 Nano Beam scheme

前節では、衝突点のベータ関数（特に垂直方向）を絞ることがルミノシティの常套手段であるが、hourglass 効果によって、ベータ関数の下限値がバンチ長程度に制限されることを述べた。この制限を取り除く方法が存在する。この方法が、P. Raimondi 氏によって提案された方式[3]であり、KEK では Nano Beam scheme と呼んでいる。そのアイデアの本質的なものは、水平方向に非常に細いビームを比較的大きな交差角で衝突させるというもので、概念図は Fig. 5 のようになる。Fig. 5 の上の図は、ビーム衝突の様子を上から見た図で、水平方向に非常に細いビームが比較的大きな衝突角（$2\phi_c$）で衝突している様子を示している。その結果、ビームは短い長さ L の領域でのみ衝突する（すれ違う）。基本的なアイデアは、この狭い領域 L にフォーカスして垂直方向にビームを強力に絞り込むということである。正面衝突の場合は、バンチ長程度までしかベータ関数を絞り込めなかったのが、この場合は、長さ L まで絞り込めるというところがみそである。Fig. 5 の下の図は衝突を横から見た図であるが、垂直方向のビームサイズが L で表される領域から外れたところでは大きく広がっていることがわかる。広がっても、そこでは衝突が起こらないから構わないわけである。Fig. 5 は説明のための概念図であるが、より詳しい衝突の様子を Fig. 6 に示す。Fig. 6 の上の図は、Fig. 5 と同じものである。このような交差角衝突の場合、x 方向にローレンツブーストした座標系に移行することがよくやられる。この系では、x 方向（図の上方向）には、ビームに乗って移動するので、こちら方向にはビームは移動しない。従って、この系では真ん中の図のように、交差角の半分（ϕ_c）だけ傾いた二つのバンチが、図のように傾いたまま衝突することになる。この時、バンチ内の粒子はバンチの長手方向の位置に依存して、異なる時間に（x 方向には異なる場所で）相手のバンチと衝突することになるが、衝突する場所は進行方向には同じになる。この衝突時間の違いを無視すると、衝突の様子は進行方向に分布を射影した一番下の図と同じになることが理解できるであろう。このように射影した系で考えると、水平方向の有効ビームサイズが、

$$\sigma_x^{\text{effective}} = \sigma_z \sin\phi_c \tag{2-12}$$

となり、また、有効バンチ長は、

$$\sigma_z^{\text{effective}} = \sigma_x / \sin\phi_c \tag{2-13}$$

となることが分かる。
(問： (2-12), (2-13)を示せ。)

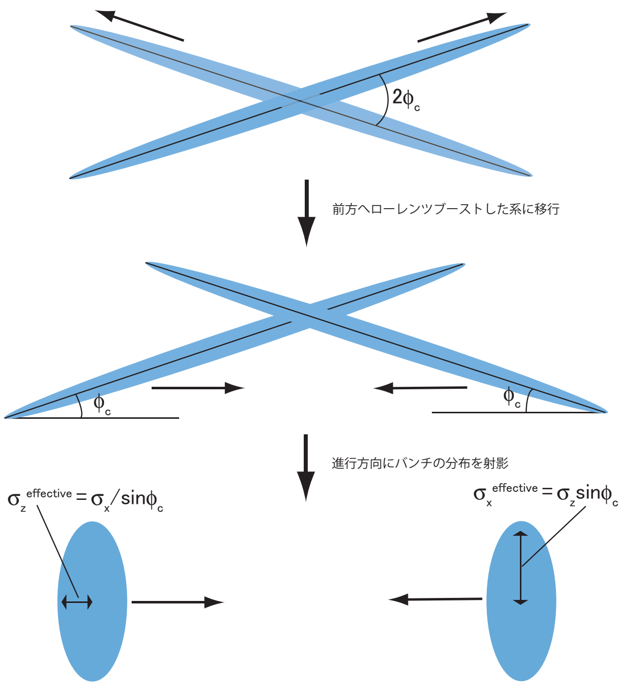

Fig. 6: Nano Beam scheme 説明図

このように、Nano Beam scheme では、水平方向と進行方向のビームサイズが入れ替わるのが特

徴である。この有効ビームサイズを用いて、Nano Beam scheme の場合のルミノシティとビーム・ビームパラメータの公式を書き下すことができる。まず、ルミノシティの方は、

$$L = \frac{N_- N_+}{4\pi\sigma_z \sin\phi_c \sigma_y^*} f R_L \tag{2-14}$$

となる。ここで、二つのビームのバンチ長と衝突点での垂直方向のビームサイズは等しいと仮定した。次にビーム・ビームパラメータは、

$$\xi_{y\pm} = \frac{r_e}{2\pi\gamma_\pm} \frac{\beta_{y\pm}^* N_\mp}{\sigma_{y\mp}^* \left(\sigma_z \sin\phi_c + \sigma_{y\mp}^*\right)} R_{\xi\pm} \tag{2-15}$$

となる。要するに、水平方向のビームサイズが有効ビームサイズに入れ替わっただけである。従って、ルミノシティのもう一つの公式(2-11)はそのまま使える。但し、水平、垂直方向のビームサイズの比 a の計算は、有効ビームサイズを用いて行う必要がある。また、geometrical loss を表すファクターも、Fig. 6 の一番下の図について計算する必要がある（というより、この射影した系でやらないと geometrical loss factor の計算が非常に面倒である）。

Table 1 Nano Beam scheme 関連パラメータ

	KEKB (LER)	SuperKEKB (LER)
交差角	±11mrad	±41.5mrad
β_x^*	1.2m	32mm
β_y^*	5.9mm	0.27mm
ε_x	18nm	3.2nm
ε_y	169pm	8.64pm
$\varepsilon_y / \varepsilon_x$	0.94%	0.27%
σ_{x^*}	147 μm	10.1 μm
σ_{x^*}（有効値）	-	249 μm
σ_z	~7mm	6mm
σ_z（有効値）	-	0.24mm
σ_y	~1μm	48nm

さて、Nano Beam scheme を用いて hourglass 効果を緩和し、衝突点の垂直方向のベータ関数を絞るには、(2-13)で示されている有効バンチ長を短くする必要がある。そのためには、衝突点での水平ビームサイズを小さくするか、交差角を大きくする必要がある。この二つを比べると、水平方向のビームサイズを縮めることの方が交差角を大きくすることより重要である。何故かというと、交差角を大きくすると、(2-15)で表されるビーム・ビームパラメータが小さくなり、必要な値までこのパラメータを大きくできないことがあり得るからである。また、衝突角が大きいとビーム・ビーム効果によるシンクロ・ベータ結合が大きくなって、ビームサイズの増大が起こり易いという問題も出てくる。

以上は、概念的なお話であった。次に、SuperKEKB の設計パラメータを用いて、もう少し具体的な説明をしよう。Table 1 に Nano Beam scheme に関連するいくつかのマシンパラメータを示す。ここでは、LER (Low Energy Ring)のパラメータのみを示しているが、HER (High Energy Ring)のパラメータもそれほど大きくは違わない。また、比較のために、KEKB のパラメータも示した。この KEKB のパラメータは、Crab 空洞を用いた運転で、実際に達成されたものである。Crab 空洞を用いた運転なので、交差角はあっても実効的には正面衝突である。Table 1 でまず注目すべきは、バンチ長（σ_z）である。正面衝突では、このバンチ長によって、衝突点の垂直ベータ関数（β_y^*）がどこまで、絞れるかが決まってしまう。KEKB の場合、バンチ長は 7mm 程度である。そして、衝突点の垂直ベータ関数は、5.9mm で運転を行っていた。このベータ関数をもっと絞ることも可能ではあったが、これ以上絞ってもルミノシティは上がらなかったので、この値で運転を行っていた。従って、KEKB の衝突点の垂直ベータ関数の下限は、hourglass 効果で制限されていた。これが、KEKB のルミノシティの一つの制限であった。

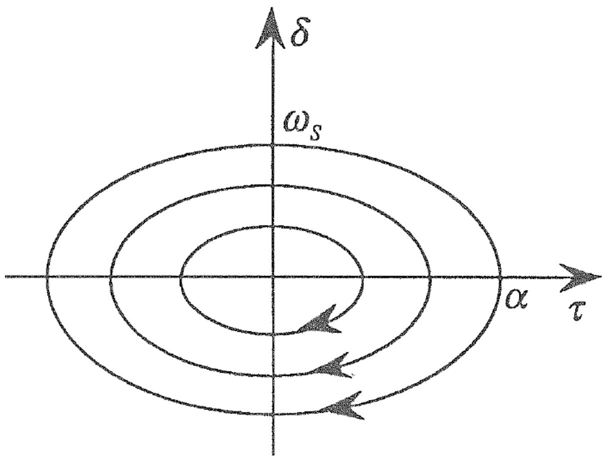

Fig. 7: シンクロトロン振動の様子

ここで、バンチ長について少し詳しく説明しておく。まず、バンチ長と密接な関係がある量として、バンチ内の粒子のエネルギー広がりがある。バンチ内粒子のエネルギー分布もほぼガウス分布していて、その標準偏差をσ_eで表す。このエネルギー広がり（σ_e）は、よく知られているように、粒子が放射光を放出することに起因する放射励起（radiation excitation）と放射減衰（radiation damping）の釣り合いで決まる量であるが、二極電磁石の曲率半径（磁場の強さ）でほぼ決まってしまい、あまり変更の余地がない。（これに対して、transverse 方向のエミッタンスも同様に、放射励起と 放射減衰の釣り合いで決まる量であるが、こちらは粒子が光子を放出場所の dispersion やベータ関数などの Twiss parameter にも依存するので、エミッタンスを小さくすることには、ある程度努力の余地がある。）ビームのエネルギー広がりはこのようにして決まるが、エネルギー広がりが決まると、シンクロトロン振動を通じてバンチ内の粒子の進行方向の分布（バンチ長）が決まる。Fig. 7 にシンクロトロン振動の様子を表す longitudinal 方向の位相空間の図を示す。ここでは、位相空間は reference particle (synchronous particle)とのエネルギーの違い（δ）と reference particle からの時間遅れ（τ）で表されている。ここで重要なことは、位相空間での運動を表す楕円の縦横の比はω_s/τで決まるということである。ここで、ω_sはシンクロトロン振動の角振動数、αは momentum compaction factor である。従って、エネルギー広がり（σ_e）が与えられると、αを小さくするか、ω_sを大きくすることで、バンチ長を縮められる余地があることが分かる。但し、ω_s はαの平方根に比例するので、結局バンチ長はαの平方根に比例し、ω_s に反比例して変わることになる。しかし、αを小さくすると、後述のバンチ長やエネルギー広がりを大きくする microwave instability のしきい値を下げてしまうという問題もある。また、RF 電圧を上げると、ω_s を高くすることができるが、その依存性は RF 電圧の平方根に比例するというものであり、やはり大幅にバンチ長を短くすることは現実的ではない。さらに、仮に短いバンチが作れたとしても、バンチ電流が増えてくると、バンチ長（やエネルギ広がり）が大きくなってしまうプロセスが存在する。この講義では詳しくは触れないが、このプロセスには二つあって、第一は、potential well distortion と呼ばれるもので、バンチが作る wakefield が RF 電圧の作る potential をゆがめて、実質的に RF 電圧の収束力を弱めることによって生じる。もう一つは、microwave instability と呼ばれるもので、やはり longitudinal 方向の impedance によって生じる single bunch instability である。例えば、KEKB の LER は CSR (coherent synchrotron radiation) による impedance のためにこの instability が起こりバンチ長とエネルギー広がりが増えるという現象が観察された（Table 1 の KEKB のバンチ長 7mm はこの instability の結果で、低いバンチ電流では 5mm 程度である）。このように、電子貯蔵リングにおいて、短いバンチ長を得るのは限界がある。その困難の大元には、バンチ内粒子のエネルギー広がりが放射光放出の効果で決まってしまうという問題がある。放射光マシンでも短バンチの要求があるが、この要求に応えるために、バンチ長が放射励起と 放射減衰の釣り合いではなく、入射ビームのバンチ長で決まる ERL（Energy Recovery Linac)を用いる試みがなされつつある。また、SuperKEKB のように貯蔵電流が極めて高いマシンでは、仮に非常に短いバンチが何らかの方法で得られたとしても、短バンチに起因する強

い HOM (Higher Order Mode) loss による各種のハードウェアの発熱などの問題が深刻になるという困難もある。

以上のように、実際のバンチ長を縮めて hourglass 効果を避けるのには、限界がある。SuperKEKB では、バンチ長自体は 6mm と KEKB と同程度であるが、Nano Beam scheme の採用により、有効バンチ長が 0.24mm と非常に短い値が得られる。このような短い（有効）バンチ長が得られるので、衝突点の垂直方向のベータ関数の設計値は、0.27mm と非常に小さい値に設定されている。KEKB の約 1/20 で、目論見通りだとするとこれだけで、ルミノシティが 20 倍になる計算になる。注意すべきは、この短い有効バンチ長を得るために、衝突点での水平ビームサイズは KEKB での値より一桁以上小さく取り、また交差角も約４倍大きくしていることである。水平方向のビームサイズ小さくするために、水平エミッタンスと衝突点の水平ベータ関数の両方を KEKB と比べて大幅に小さな値に取っている。この水平エミッタンスと水平ベータ関数を小さくすることはどちらも重要で、片方だけの努力では不十分である。SuperKEKB の設計では、まず状況が許す限り水平エミッタンスを下げる努力をした上で、水平ベータ関数も小さくする努力をしている。交差角を大きくしたことも有効バンチ長を縮めるのに寄与はしている。次に注意すべきことは、有効水平ビームサイズは、KEKB での水平ビームサイズより大きくなっていることである。(2-15)で表される垂直方向のビーム・ビームパラメータの分母が大きくなり、この値を大きくしにくくなる。また、分子の垂直ベータ関数は KEKB に比べて大幅に小さくなるので、この意味でもビーム・ビームパラメータは小さくなる（但し、分母の垂直ビームサイズにも垂直ベータ関数が平方根の形で含まれるので、ビーム・ビームパラメータはベータ関数の平方根に比例になる）。後述するように、KEKB と SuperKEKB でビーム・ビームパラメータはほぼ同じで、またバンチ内の粒子数もそれほどは変わらない。従って、SuperKEKB で KEKB と同じ値のビーム・ビームパラメータを実現するためには、垂直エミッタンスを小さくするしかない。Table 1 に示されているように、SuperKEKB では、垂直エミッタンスは絶対値でも非常に小さく、また水平方向と垂直方向のエミッタンス比（通常カップリングと呼ばれる）も KEKB に比べて非常に小さくする必要がある。その結果、衝突点での垂直方向のビームサイズは約 50nm と非常に小さくなるが、ビームサイズをはかる単位がミクロン（μm）からナノメータ（nm）になる。これがこの新しい衝突方式が、Nano Beam scheme（ナノビーム方式）と呼ばれる理由である。以上、Nano Beam scheme を実現するためのパラメータの条件について述べた。要するに、low beta（低ベータ）、low emittance（低エミッタンス）である。

以上、Nano Beam scheme の概要と、この方式を採用した場合のパラメータの選択について解説した。低エミッタンスを実現する方法は、次章で解説する。また、次次章で SuperKEKB のパラメータ全般について概説する。しかし、その前に次節で、Nano Beam scheme と対になってよく宣伝される Crab Waist scheme について説明する。

2.5 Crab Waist scheme

Crab waist scheme は、Nano Beam scheme と同じく、P. Raimondi 氏によって提案されているものである。導入の主な目的は、Nano Beam scheme で必要なかなり大きな交差角によって引き起こされる悪い効果を軽減することである。Fig. 8 に Crab Waist scheme の説明図を示す。Nano Beam scheme の説明図と同じくビームを上から見た図であるが、ここではバンチは非常に長いとして、一部だけを描いている。また、ローレンツブーストした系ではなく、実験室系である。ビームはこの場合、$\pm 1\sigma_x$ の線で表されている。電子ビームが陽電子ビームとすれ違う（相互作用する）領域の長さが表示されているが、その長さは、

$$L_{\text{cross}} \cong \frac{\sigma^*_{xp}}{\phi_c} \tag{2-16}$$

である。この長さは、(2-13)で示されている陽電子の有効バンチ長である。ここで、Fig. 8 と Fig. 6 の真ん中の図を比べると、Fig. 8 の方が Fig. 6 の真ん中の図より、交差角が二倍大きい ($2\phi_c$) ので、相手ビームと相互作用する長さが半分になるように見えるかもしれない。しかし、実際はそうではないことに注意しよう。つまり、Fig. 8 では時間が経っても図の形が変わらないのに対して、Fig. 6 の真ん中の図では両方のビームがお互いに近寄ってきて衝突するので、相互作用する領域が静止図で見たものの半分になるからである。

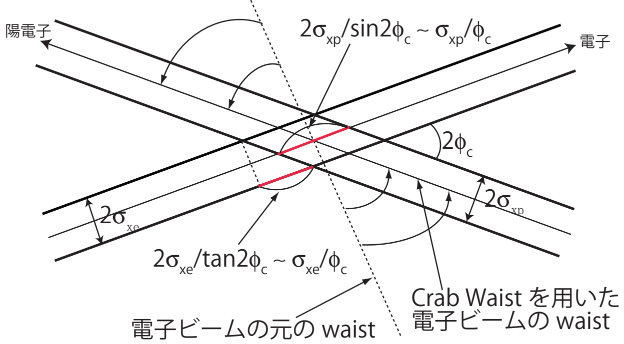

Fig. 8: Crab Waist scheme 説明図

さて、(2-16)の長さが β_y*より長くならないようにするのが、hourglass 条件である。そうしないと、電子がベータ関数の大きなところで、相手ビームとすれ違って、ビーム・ビーム効果でビームサイズの増大が起こりやすくなる。これは既に述べたことである。しかし、交差角がある場合は、これに加えて、x 方向にオフセットを持って相手とぶつかる粒子は、ベータ関数がずれたところで相手ビームとぶつかることを考慮する必要がある。ベータ関数の最小値（これを waist(腰)という）は、図に示されているように、s = 0、すなわち衝突点でビームの進行方向と垂直な線上に並んでいる。交差角がある場合、x 方向にオフセットを持った粒子は、waist からずれたところで相手ビームとぶつかることになる。どれぐらい waist からずれるかというと、$\pm 1\sigma_x$ のオフセットで、ずれが図に示されているように、

$$\Delta s_{\text{waist}} \cong \frac{\sigma^*_{xe}}{\phi_c} \tag{2-17}$$

程度になる。(2-16)に似ているが、こちらは自分のビームのサイズを含む式である。これがもう一つの hourglass 効果と呼ぶべきものであり、x 方向にオフセットを持った粒子に対しては、通常の hourglass 効果に、この新しい hourglass 効果が加わることになる。この第二の hourglass 効果は、x 方向のオフセットに依存するために、ビーム全体に対する効果の大きさの見積もりが難しい。通常、ビーム・ビームシミュレーションで効果を見積もる。但し、この第二の hourglass 効果を避ける方法が存在する。これが、Crab Waist scheme である。この方法は、要するに Fig. 8 に書かれているように、waist の線を相手ビームの軌道中心に合うように回転させることである。つまり、x オフセットに応じて waist の位置を変えることである。x オフセットに応じて waist をずらすには、六極電磁石を用いる。六極電磁石は水平方向にずれたところをビームが通ると、四極電磁石の成分を感じるので、これが可能である。二台の六極電磁石を衝突点の両側において、衝突点で waist をずらすとともに、x オフセットを持った粒子に対する線形オプティックスのずれをこのペアの六極電磁石の間に局所化するように配置される。Crab Waist が成り立つためのよりくわしい条件については、Appendix A で説明されているので、参照して頂きたい。

この Crab Waist はイタリアの SuperB 計画に関して提案されたものであるが、SuperKEKB の場合も検討されている。しかし、少なくとも SuperKEKB の場合については、Crab Waist を実現するための六極電磁石の影響で、ダイナミックスアパーチャーが非常に狭くなり、必要なビーム寿命が確保できそうにないことが分かった。SuperB 計画の場合にはそういう結果は報告されていないが、その違いがどこから来るのかは、今のところ分かっていない。なお、Crab Waist scheme は Nano Beam scheme のマシンだけでなく、従来の有限角度衝突のマシンでも、ルミノシティに対して効果があるといわれている。イタリアの Frascati 研究所の DAΦNE は、KEKB と同じく±11mrad の交差角を持つコライダーであるが、Crab Waist scheme をデモンストレートするために、実際に Crab Waist scheme を導入し、ある程度ルミノシティが向上した。また、シミュレーションでは KEKB でもルミノシティ向上の可能性があるという結果が出たので、導入を検討されたが、やはりダイナミックスアパーチャーが大幅に減少するというシミュレーション結果が出て、導入を断念したという経緯がある。Crab Waist scheme のルミノシティに対する影響は、マシンパラメータによる。現在の SuperKEKB のマシンパラメータを用いたビーム・ビームシミュレーションでは、Crab Waist がもし可能ならルミノシティは約 10%上昇することが示されている（Fig. 9 ）。

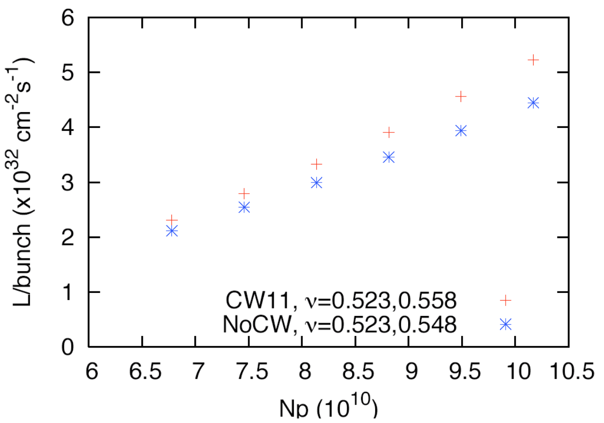

Fig. 9: SuperKEKB でのビーム・ビームシミュレーション（strong-weak モデル)。Crab Waist を用いる場合と用いない場合の比較を示す。

また、Crab Waist はルミノシティに直接寄与しなくても、入射ビームが水平振動している場合に、Nano Beam scheme ではロスし易いのを防ぐ効果や衝突点での x-y カップリングなどのエラーのルミノシティ劣化への影響を弱める等の効果も期待できる。但し、Crab Waist を用いると、ビームの衝突する場所を正確に設計値に合わせないと waist がずれてしまう等の困難もあり、よいことばかりではない。

3. 低エミッタンスビーム

SuperKEKB の特徴の一つは、低エミッタンスである。この節では、低エミッタンスビームを得る方法について述べる。まず、エミッタンスに関連する公式について述べるが、詳細な式の導出は他の教科書 [1][2] に譲り、本講義ではエミッタンスがどういうメカニズムで決まるかの物理的イメージについて解説することに主眼を置く。

3.1 エミッタンスの公式

前節でも述べたがエミッタンスを決める（あるいは生み出す）物理的過程は放射光の放出である。電子貯蔵リングにあっては、これが唯一の過程である。例えば、あるエミッタンスを持ったビームを電子貯蔵リングに入射すると、放射減衰のために入射されたビームのエミッタンスという記憶はいずれ消え去って、リングのパラメータのみで決まるあるエミッタンスに落ち着くのである。

　従って、エミッタンスを考える上での第一歩は、放射光の放出過程を調べることである。電子（陽電子）が磁場中で単位時間に放出する放射光のパワーは、古典電磁気学の教科書に見られるように、以下の式で与えられる。

$$P = \frac{2}{3}\frac{e^2 r_e c^3}{\left(mc^2\right)^3} E^2 B^2 \qquad (3\text{-}1)$$

つまり、粒子のエネルギーの二乗と磁場の二乗に比例する。この比例関係は記憶するに値する。ある電子貯蔵リングでビームを加速したとしよう。その場合、磁場はビームのエネルギーに比例して強くしていかなければならないので、個々の粒子の放出する放射光のパワーはエネルギーの 4 乗に比例して強くなっていく。次に、ベータトロン振動の放射減衰（radiation damping）について述べる。ある粒子が放射光を放出すると、エネルギーは変化するが、その粒子の位置と角度は直接は変化しない（Fig. 10)。これに対して、放射光放出で失ったエネルギーは RF 空洞で補われる必要がある。この加速のとき、粒子の位置は変化しないが、角度は減る方向に変化する（Fig. 11)。この変化を粒子の位相空間で書くと、Fig. 12 のよ

うになる。これが、放射減衰の主なメカニズムである。つまり、放射減衰はビーム加速によって生じるものであり、線形加速器における断熱減衰（adiabatic damping）と原理は同じである。粒子がリングを一周する間に失うエネルギーを U_0 とすると、ベータトロン振動の放射減衰の減衰時間（指数関数的に減衰する振動振幅が 1/e になる時間）は、

$$\tau_\beta = 2\frac{E}{U_0}T \qquad (3\text{-}2)$$

となる。ここで、E は粒子のエネルギー、また T はリングを一周する時間（周回時間）である。また、シンクロトロン振動の減衰時間は、

$$\tau_\varepsilon = \frac{E}{U_0}T \qquad (3\text{-}2)$$

となる。つまり、放射光を出す量だけで減衰時間が決まる。これらの式も記憶に値する式である。覚え方は、シンクロトロン振動の減衰時間をリングの周回数で表すと、それがビームエネルギーと U_0 の比になることということである。ベータトロン振動の減衰時間は、その２倍である。また、ある特定のマシンでエネルギーを変えると、放射光のパワーはエネルギーの４乗で増えるので、放射減衰時間はエネルギーの３乗に逆比例する。

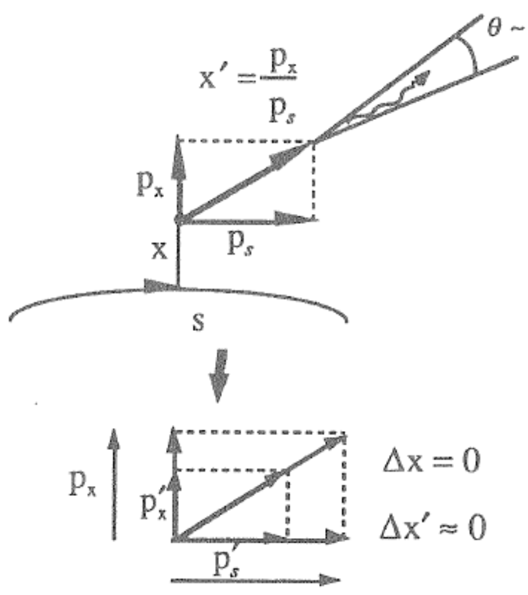

Fig. 10: 放射光の放出時の座標の変化

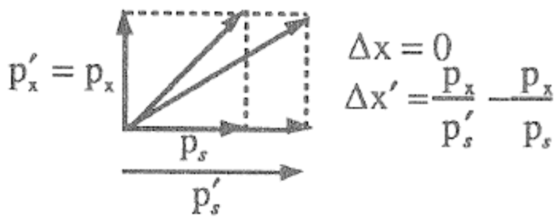

Fig. 11: RF 空洞での加速時の粒子の座標の変化

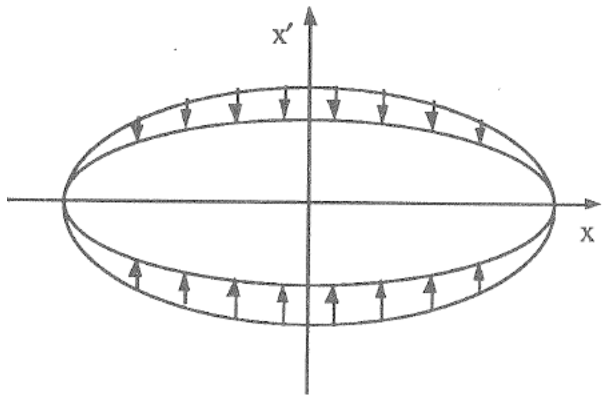

Fig. 12: RF 空洞での加速時の粒子の座標の位相空間での変化

次は、放射励起であるが、その準備として放射光のスペクトルについて述べる。相対論的な電子が放出する放射光のスペクトルは、

$$F(\omega) = \frac{P}{\omega_c} S\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \qquad (3\text{-}3)$$

で与えられる。ここで、$F(\omega)d\omega$は、磁場中を運動する電子によって単位時間に放出される, ωと$\omega+d\omega$の間の周波数を持った放射光のパワーである。ω_cは、critical frequency と呼ばれ、次の式で定義される。

$$\omega_c = \frac{3}{2}\frac{c\gamma^3}{\rho} \qquad (3\text{-}4)$$

ここで、ρは軌道曲率半径である。また、Sは、

$$S(\xi) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi}\xi\int_\xi^\infty K_{5/3}(\xi)d\xi \qquad (3\text{-}5)$$

で定義される。ここで、$K_{5/3}$ は、modified Bessel function である。また、

$$P = \int_0^\infty F(\omega) d\omega \tag{3-6}$$

となるように、S を規格化している。Fig. 13 に S をξ (= ω/ω_c) の関数としてプロットした。

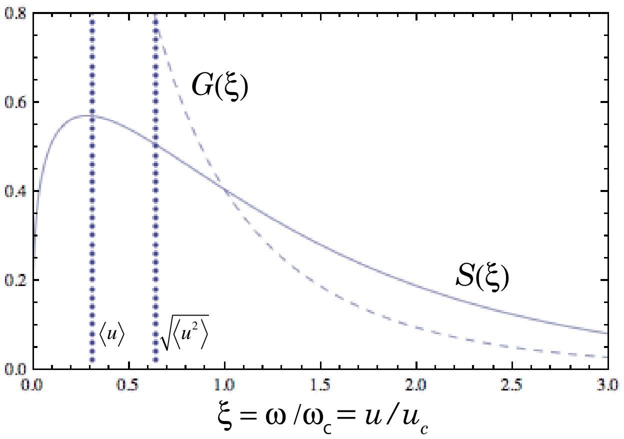

Fig. 13: 放射光のスペクトル

後で見るように、放射励起は放射光が光子として量子化されて放出されることによって生じる。では、電子が磁場中を運動するときに、単位時間にどれぐらいのエネルギーの光子をどれぐらいの数放出するのであろうか？これは、(3-3)式と光子は$\hbar\omega$ のエネルギー量子として放出されることを用いると簡単に求まる。ここで、電子が単位時間にエネルギーが u と $u+du$ の間にある光子を n(u)du 個放出するとする。すると、

$$n(u)du = \frac{F(u/\hbar)du/\hbar}{u} \tag{3-7}$$

となる（問：これを示せ)。従って、

$$n(u) = \frac{P}{u_c^2} G\left(\frac{u}{u_c}\right) \tag{3-8}$$

となる。ここで、

$$G(\xi) = \frac{1}{\xi} S(\xi) \tag{3-9}$$

$$u_c = \hbar\omega_c = \frac{3}{2}\frac{\hbar c\gamma^3}{\rho} \tag{3-10}$$

と置いた。u_c は critical energy と呼ばれる。G も Fig. 13 に示されている。(3-8)が電子の放射光（光子）放出の基本式で、この式よりいくつかの興味ある量が計算される。以下に、結果のみを記しておく。まず、磁場中で電子が単位時間に放出する光子の総数は、

$$N_p = \int_0^\infty n(u)du = \frac{15\sqrt{3}}{8}\frac{P}{u_c} \tag{3-11}$$

となる。次に、放出される光子のエネルギーの平均値は、

$$\langle u \rangle = \frac{8}{15\sqrt{3}} u_c \cong 0.308 u_c \tag{3-12}$$

で与えられる。また、放射励起の計算では次の量が必要になる。

$$N_p \langle u^2 \rangle = \int_0^\infty u^2 n(u) du \tag{3-13}$$

この量は、単位時間に放出される光子のエネルギーの二乗の和の期待値を意味するが、

$$N_p \langle u^2 \rangle = \frac{55}{24\sqrt{3}} u_c P \cong 1.32 u_c P \tag{3-14}$$

となる。放射減衰は P のみで決まったが、放射励起の方は u_c にも依存することに注意しよう。ここで、P と u_c について、実用的な単位系で計算するための式を書いておく。

$$P[\mathrm{GeV/s}] \cong 4.23 \times 10^3 \frac{E^4[\mathrm{GeV}]}{\rho^2[\mathrm{m}]} \tag{3-15}$$

$$u_c[\mathrm{keV}] \cong 2.22 \frac{E^3[\mathrm{GeV}]}{\rho[\mathrm{m}]} \tag{3-16}$$

さて、以上で必要な準備ができたので、放射励起の過程の説明に入る。既に述べたように、電子が磁場で曲げられて放射光を放出する際に、電子のエネルギーは変化するが、電子の位置と角度は変化しない。従って、放射光放出は transverse 方向の運動とは無関係にも見えるが、そうではない。すなわち、dispersion がゼロではない場所でエネルギーが変化すると、そのエネルギーに対応する閉軌道は、元のエネルギーの閉軌道とは異なるので、（放射光を放出する前はベータトロン振動せずに閉軌道上を運動していたとしても）新しい閉軌道の周りでベータトロン振動を始めることになる。これが、放射励起の素過程である。Fig. 14 にこの過程の概念図を示す。

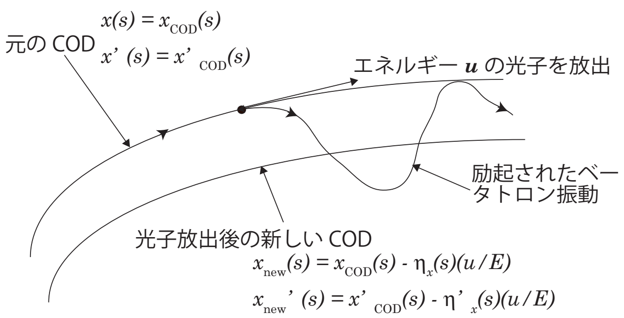

Fig. 14: 放射励起の概念図

以下水平方向のみを考えるが、垂直方向に dispersion があり、電子がその場所で放射光を放出すれば、同様に垂直方向の放射励起が生じる。Dispersion が η_x, その傾きが η_x' の場所で電子がエネルギー u の光子を放出すると、閉軌道がずれるために、以下の量のベータトロン振動が励起される。

$$\Delta x_\beta = \eta_x \frac{u}{E} \tag{3-17}$$

$$\Delta x'_\beta = \eta'_x \frac{u}{E} \tag{3-18}$$

となる（問： これを示せ）。ここで考えるべきことは、この放射励起による Courant-Snyder invariant

$$W_x = \gamma_x x^2 + 2\alpha_x x x' + \beta_x x'^2 \tag{3-19}$$

の変化である。この量は、ベータトロン振動をしている限りでは不変量（invariant）であったが、放射光を放出する場合はもはや不変量ではあり得ない。(3-17)、(3-18)による W_x の変化は、

$$\begin{aligned}\Delta W_x =& \\ & 2\left(\gamma_x x_\beta \Delta x_\beta + \alpha_x x_\beta \Delta x'_\beta + \alpha_x x'_\beta \Delta x_\beta + \beta_x x'_\beta \Delta x'_\beta\right) \\ & +(\gamma_x \Delta x_\beta^2 + 2\alpha_x \Delta x_\beta \Delta x'_\beta + \beta_x \Delta x'^2_\beta)\end{aligned} \tag{3-20}$$

となる（問： これを示せ）。この式の右辺を次のように二つに分けて扱おう。

$$\begin{aligned}\Delta W_D =& \\ & 2\left(\gamma_x x_\beta \Delta x_\beta + \alpha_x x_\beta \Delta x'_\beta + \alpha_x x'_\beta \Delta x_\beta + \beta_x x'_\beta \Delta x'_\beta\right)\end{aligned} \tag{3-21}$$

$$\Delta W_E = \gamma_x \Delta x_\beta^2 + 2\alpha_x \Delta x_\beta \Delta x'_\beta + \beta_x \Delta x'^2_\beta \tag{3-22}$$

ΔW_E は、二次の微小量であり、通常であれば Δt を充分小さくとれば他の一次の微小量に対して無視できるはずである。もしも、放射光の放出が、時間的に連続して行われ、従って、電子のエネルギーが連続的に変化する場合、これは全く正しい。しかし、実際は、電子による放射光の放出は、量子論に従う確率過程であり、電子は、あるエネルギーを持った光子を、確率的に、しかもほぼ瞬時に放出するのである。即ち、電子による放射光放出は、時間的に連続して起こるのではなく、時間的に飛び飛びに起こり、その時放射光は、光子というエネルギーの塊として放出されるのである。（そして、電子がどの時間に光子を放出するか、また、どれだけのエネルギーの光子を放出するかは、確実には予言できないのであって、我々が知りうるのは、それらが起こる確率のみであ

る。）この様に、光子が時間的に飛び飛びに、放出される場合、ΔW_Eは、$\Delta t \to 0$ でも他の一次の微小量に対して無視できない値を持つ。そして、実際このΔW_E の項により放射励起が生じるのである。なお、ΔW_Dは放射減衰時間に対する補正を与える（damping partition number を変化させる）ものであ、その効果は(3-29)で表される。(3-17)、(3-18)の変化によるΔW_Eは、

$$\Delta W_E = \left(\gamma_x \eta_x^2 + 2\alpha_x \eta_x \eta_x' + \beta_x \eta_x'\right)\left(\frac{u}{E}\right)^2 \tag{3-23}$$

となる（問：これを示せ)。ここで、

$$H = \gamma_x \eta_x^2 + 2\alpha_x \eta_x \eta_x' + \beta_x \eta_x' \tag{3-24}$$

で定義される量を導入する。この H は、Courant-Snyder invariant W_xにおいて、x, x'を η_x とη_x' で置き換えたものであり、特に名前はついていないが、エミッタンスの計算ではよく用いられる基本的な量である。次に、(3-23)による放射励起の平均変化率を計算する必要がある。そのためには、(3-23)を全てのエネルギーの光子ついて足し合わせ、またリング一周で積分し、周回時間 Tで割ればよい。すなわち、

$$\frac{dW_E}{dt} = \frac{1}{T}\oint \frac{H}{E^2}\left[\int_0^\infty u^2 n(u)\,du\right]\frac{ds}{c} \tag{3-25}$$

となる。この積分を計算すると、

$$\frac{dW_E}{dt} = 2C_\gamma \frac{U_0}{ET}\frac{\gamma^2}{\oint \frac{ds}{\rho^2}}\oint \frac{H}{\left|\rho^3\right|}ds \tag{3-26}$$

が得られる。ここで、

$$C_\gamma = \frac{55}{32\sqrt{3}}\frac{\hbar}{mc} \tag{3-27}$$

と置いた。ここで、(3-26)はリングが決まると、定数になることに注意しよう。すなわち、放射励起によって、W_x は直線的に増加する。以上で、放射励起による W_x の変化率が求まった。放射減衰の項と合わせると、

$$\frac{dW_x}{dt} = -\frac{U_0}{ET}(1-D)W_x + \frac{dW_E}{dt} \tag{3-28}$$

が得られる。ここで、D はこれまで述べなかったが、

$$D = \frac{\oint \eta_x \left(\frac{2K}{\rho} + \frac{1}{\rho^3}\right)ds}{\oint \frac{1}{\rho^2}ds} \tag{3-29}$$

で定義される量であり、ΔW_Dより生じる。ここで、Kは四極電磁石の K値であるが、進行方向に積分していない値であることに注意。また、

$$J_x = 1 - D \tag{3-30}$$

で定義される damping partition number もよく用いられる。Dは、粒子のエネルギーが変わったときに感じる磁場の違いの効果を表現する量であるが、Dがゼロからずれると放射減衰時間も変化し、

$$\tau_\beta = \frac{2}{J_x}\frac{E}{U_0}T \tag{3-31}$$

となる。また、シンクロトロン振動の放射減衰時間も変化し、

$$J_\varepsilon = 2 + D \tag{3-32}$$

を用いて、

$$\tau_\varepsilon = \frac{2}{J_\varepsilon}\frac{E}{U_0}T \tag{3-33}$$

となる。通常 1 に非常に近い垂直方向の J_yを加えて、これらを damping partition number と呼ぶ。そう呼ばれる理由は、

$$J_x + J_y + J_\varepsilon = 4 \qquad (3\text{-}34)$$

という関係が成り立ち、D を通じて、放射減衰の強さを、これら 3 方向でどう分配するかをこれらの数値が決めるからである。Combined 型の電磁石を用いない場合は、D は通常ゼロに近いが、RF 周波数をわざと中心値から外すと、四極電磁石が Combined 型電磁石の役割を持つことになり、D が大きく変化する。この方法で、放射減衰時間を変えたり、エミッタンスを変化させることも原理的には可能である。さて、いよいよエミッタンスを与える式の導出が近づいた。平衡状態の W_x の値は、放射減衰と放射励起の釣り合いで決まる。(3-28)の右辺をゼロと置くことにより、平衡状態での W_x は、

$$W_E^{eq} = \frac{2C_\gamma}{J_x}\gamma^2 \oint \frac{H}{\left|\rho^3\right|}ds \Big/ \oint \frac{ds}{\rho^2} \qquad (3\text{-}35)$$

となる。この値はある粒子に対する確率的な期待値である。そして、バンチ内の粒子の分布が定常状態に達している時は、この期待値が粒子平均になる。エミッタンスは Courant-Snyder invariant の粒子平均の 1/2 になるから、

$$\varepsilon_x = \frac{W_E^{eq}}{2} = \frac{C_\gamma}{J_x}\gamma^2 \oint \frac{H}{\left|\rho^3\right|}ds \Big/ \oint \frac{ds}{\rho^2} \qquad (3\text{-}36)$$

となる。

3.2 低エミッタンスビームを得る方法

前節でエミッタンスを決める過程について、立ち入って説明した。(3-36)によって、エミッタンスが決まるから、ここから出発して議論を進めればいいと思われる。しかし、長々とエミッタンスが決まる過程を説明したのは、物理的イメージを示したかったためである。エミッタンスを下げる方法についても、この物理的イメージに基づいて考えると分かりやすい。エミッタンスは、放射励起と放射減衰の釣り合いで決まる。従って、エミッタンスを下げるためには、放射励起を弱くするか放射減衰を強くするかの方法がある。まず、放射励起を弱くするには、(3-23)から考えると、光子のエネルギーを下げるか、H の積分を小さくするかの方法がありそうなことが分かる。また、放射減衰を強くするには、リングにウイグラー電磁石を設置して、放射光の放出を増やせば P が増え、(3-2)より放射減衰時間が短くなる。但し、新たに放射光を出すので、その放射励起でエミッタンスが増える効果を減らす努力が必要である。もう一つ、damping partition number J_x を大きくすれば、原理的にはエミッタンスが小さくできる。以下では、以上の 4 つの方法について、主に SuperKEKB の設計とどう関係があるかについて述べる。

3.2.1. 光子のエネルギー分布

放射励起は、放出する放射光が光子という形で量子化されていることに起因する。もし、放射光放出が連続的で、一度に放出される放射光のパワーが（$\Delta t \to 0$ の極限で）ゼロに近づくと仮定すると、放射励起は起こらない。逆に、光子のエネルギー分布が高いエネルギー方向にずれれば、放射励起は強くなる。これは、(3-17)、(3-18)を見ても分かることである。放出光子のエネルギーを下げるには、二つの方法がある。第一は、二極電磁石の磁場を弱くすることである。(3-36)において、全ての二極電磁石が同じ曲率半径を持ち（磁場が同じで）、磁場分布がハードエッジだと仮定すると、

$$\varepsilon_x = \frac{C_\gamma}{J_x}\frac{\gamma^2}{2\pi\rho^2}\oint_{Bend} H\,ds \qquad (3\text{-}37)$$

となる（問： これを示せ）。ここで、H の積分は二極電磁石の中のみで行う必要がある。従って、磁場を弱くする（曲率半径を大きくする）ことで、エミッタンスが下げられることが分かる。ここで、一つ注意すべきことは、この方法では放射励起が弱くなるが、放出する放射光のパワーが減ることによって、放射減衰も弱くなることである。しかし、(3.36)のエミッタンスは、このことも織

り込み済みである。もう一つ注意すべきことは、(3-37)からエミッタンスは曲率半径の2乗に反比例するように見えるが、そうではない。つまり、曲率半径を小さくする（磁場を弱くする）と二極電磁石の長さを長くする必要があるので、Hの積分区間がその分長くなる。従って、Hの積分が積分区間の長さに比例するという粗い近似では、エミッタンスは曲率半径に反比例して減少する。また、粒子が一周あたりに放出する放射光の全パワーは二極電磁石の曲率半径に逆比例して弱くなる（問：これを示せ)。KEKB から SuperKEKB へのアップグレードにあたって、低エミッタンス化が求められているが、Fig. 15 に示すように LER では二極電磁石の長さを長くして、磁場を弱くすることによってエミッタンスを下げるという設計になっている。しかし、HER ではこの方法は使えない。既に KEKB において、HER の二極電磁石は長く（HER の二極電磁石は TRISTAN リングで使用されたものの再利用である)、それ以上長くする空間的スペースがないからである。

放出光子のエネルギーを下げることによって放射励起を弱くするもう一つの方法は、ビームエネルギーを下げることである。これも、(3-36)より直接、エミッタンスはビームエネルギーの二乗に比例して変わることが分かる。もちろん、ビームエネルギーを下げると放射減衰は弱くなる。放射減衰時間はビームエネルギーの3乗に比例して短くなるが、他方放射励起は(3-14)、(3-15)、(3-16)、(3-25)を用いてエネルギーの5乗に比例して強くなるのである（問：このことを確かめよ)。しかし、マシンの設計において、ビームエネルギーは別の条件から決まっていることが多く、エミッタンスのコントロールをビームエネルギーで行うことはまずない。KEKB から SuperKEKB への移行において、ビームエネルギーは、3.5GeV (LER)、8.0GeV (HER)から 4.0GeV (LER)、7.0GeV (HER)へ変更になった。この変更は、主に LER の Touschek 寿命と intra-beam scattering の問題を軽減するためであったが、これに伴って、HER のエミッタンスは減少し、LER のエミッタンスは増大する方向に働く。

以上、放射光の光子のエネルギーを変えてエミッタンスを下げる二つの方法を述べたが、考えているのは、磁場中で荷電粒子が曲げられて放射光を放出するという単純な過程なので、（CSR のような特殊な効果を除いて）磁場と粒子のエネルギーだけで過程が決まってしまい、これら以外に放出光子のエネルギーを変える方法はない。

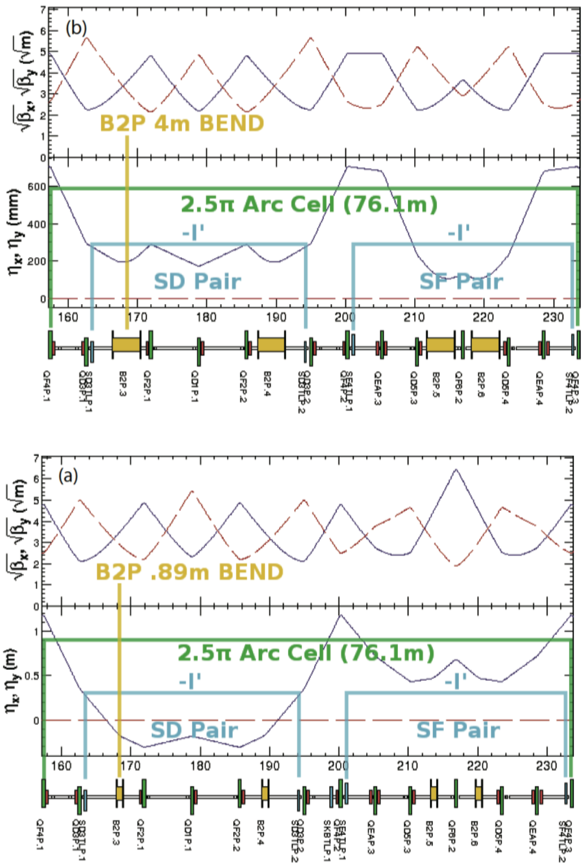

Fig. 15: KEKB(下)と SuperKEKB(上)の LER のアーク部のラティス。SuperKEKB では、二極電磁石の長さが4倍以上長くなることに注意。

3.2.2. Hの積分

放射励起を弱くしてエミッタンスを下げるもう一つの方法は、（二極電磁石中の）H の積分を小さくすることである。

FODO セルラティス

ここでは、まずアーク部の構造が伝統的な FODO セルの場合を考える。以下の取り扱いは、文献[4]

によった。ここで、F は収束四極電磁石（Focusing Quadrupole 以下 QF）、D は発散四極電磁石（De-focusing Quadrupole 以下 QD）、O の所には、二極電磁石を配置したセルであり、アーク部は基本的にこの構造がずっと繰り返すようなものである。その際、Twiss parameter (β, α, γ)や dispersion 関数（η）も、周期的に繰り返すように設計する。このように周期構造を利用すると、長い距離をビームを発散させることなく簡単に輸送できる。また、電磁石の種類が少なくなるので、電磁石の設計、製作、磁場測定などが簡単になる。さらに、セルの同じ種類の電磁石の強さは同じになるので、一台の電源で多くの電磁石に電流を供給できるというメリットもある。このような理由から、従来の多くの加速器で、FODO セルが用いられてきた。例えば、KEKB の前身である TRISTAN MR や TRISTAN AR（現 PF-AR）でも、FODO セルが採用された。しかし、KEKB や SuperKEKB では後述のように別のタイプの構造のラティスを用いている。ここでは、まず FODO セルの場合のエミッタンスについて述べる。単純な FODO セルについて考えることによって、(3-36)を見ていたのでは、分からなかったことが見えてくるだろう。

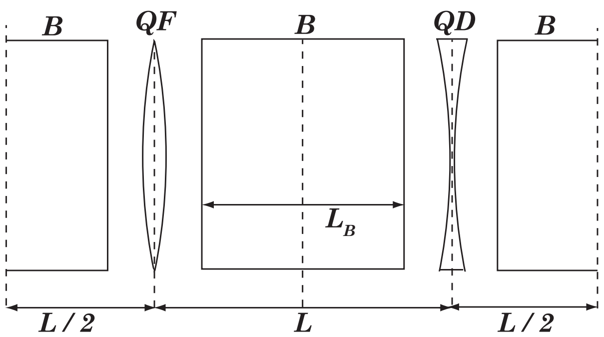

Fig. 16: FODO セルの概念図

FODO セルにおいて、Twiss parameter が周期的になるためには、QF と QD の強さがある条件を満たしている必要がある。まず、リングの各点で Twiss parameter が与えられたとき、ある二点間の transfer matrix はよく知られているように、

$$
\mathrm{M}_{12} = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{\beta_2}{\beta_1}}\left(\cos\mu + \alpha_1 \sin\mu\right) & \sqrt{\beta_1\beta_2}\sin\mu \\ -\dfrac{1+\alpha_1\alpha_2}{\sqrt{\beta_1\beta_2}}\sin\mu + \dfrac{\alpha_1-\alpha_2}{\sqrt{\beta_1\beta_2}}\cos\mu & \sqrt{\dfrac{\beta_1}{\beta_2}}\left(\cos\mu - \alpha_2\sin\mu\right) \end{pmatrix} \tag{3-38}
$$

で与えられる。ここで、μは二点間の phase advance（位相の進み）である。この二点が、FODO セルの始まりの点と次のセルの始まりの点であり、且つ周期解が存在する場合、これらの二点では Twiss parameter は同じになっているはずである。従って、

$$
\mathrm{M}_{\mathrm{cell}} = \begin{pmatrix} \cos\mu + \alpha\sin\mu & \beta\sin\mu \\ -\gamma\sin\mu & \cos\mu - \alpha\sin\mu \end{pmatrix} \tag{3-39}
$$

となる（問： これを示せ)。

ここで、Fig. 16 のような FODO セルを考える。このセルは、二極電磁石の真ん中から始まって、二極電磁石の真ん中で終わる。簡単のため、thin lens （薄肉レンズ）で考える。このとき、1 セルの transfer matrix（水平方向）は、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}_{\mathrm{cell}} &= \mathrm{M}_{L/2}\mathrm{M}_{QD}\mathrm{M}_{L}\mathrm{M}_{QF}\mathrm{M}_{L/2} = \\
&\begin{pmatrix} 1 & L/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k_d & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k_f & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & L/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 + K_d/2 - 3K_f/2 - K_dK_f/2 & L\left(2 + 3K_d/4 - 3K_f/4 - K_dK_f/4\right) \\ \left(K_d - K_f - K_dK_f\right)/L & 1 + 3K_d/2 - K_f/2 - K_dK_f/2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3-40}
$$

となる（問： これを示せ)。

ここで、k_d, k_fは QD, QF の K 値で、$K_d = k_d L, K_f = k_f L$ と置いた。M_{cell} の trace から

$$\cos\mu_x = 1 + K_d - K_f - K_d K_f / 2 \qquad (3\text{-}41)$$

同様に、垂直方向を考えると、

$$\cos\mu_y = 1 + K_f - K_d - K_d K_f / 2 \qquad (3\text{-}42)$$

となる（問：これらを示せ)。周期解が存在するためには、これらの位相の進みが実数であることが要求される。つまり、

$$\begin{aligned} -1 &< 1 + K_d - K_f - K_d K_f / 2 < 1 \\ -1 &< 1 + K_f - K_d - K_d K_f / 2 < 1 \end{aligned} \qquad (3\text{-}43)$$

となる。これらの条件を満たす K_d, K_fを図示すると、Fig. 17 のようになる。これが、よく知られたいわゆるネクタイ図である。

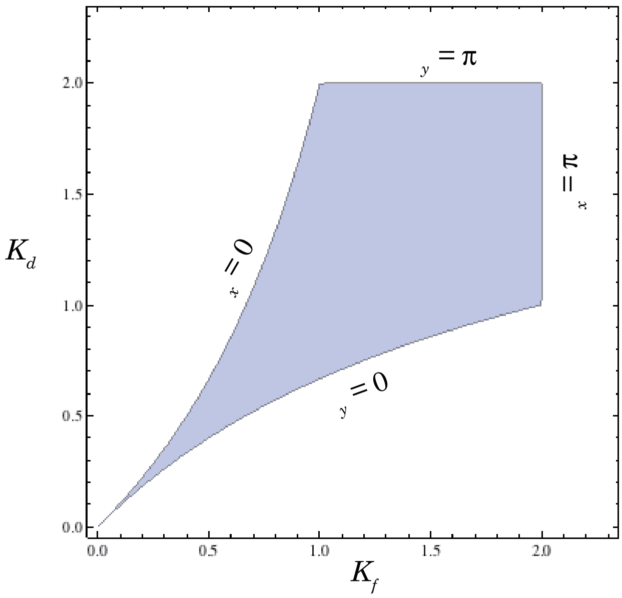

Fig. 17: FODO セルのネクタイ図

(3-39)と(3-40)より、セルの入り口の Twiss parameter が、以下のように求まる。

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{K_d + K_f}{2\sin\mu} \\ \gamma &= \frac{-K_d + K_f + K_d K_f}{L\sin\mu} \\ \beta &= \frac{L\left(2 + 3K_d/4 - 3K_f/4 - K_d K_f/4\right)}{\sin\mu} \end{aligned} \qquad (3\text{-}44)$$

（問：これを示せ)。ここで、二極電磁石は Twiss parameter には寄与しないという近似を用いていることに注意。次に、セルの入り口の dispersion 関数を求めよう。ここでも二極電磁石に対して薄肉近似を用いる。これは、二極電磁石を二つに分け、キック角$\theta/2$ の厚さゼロのものが二つ並んで、二極電磁石の真ん中に存在するという近似である。まず、dispersion はエネルギーがずれた粒子の軌道を表すことに注意しよう。軌道であるので、dispersion は通常のビーム軌道に対する transfer matrix を用いて、伝搬が求まる。但し、二極電磁石があると、新たに dispersion が発生するので、その分を足していく必要がある。従って、セルの中の dispersion は、前のセルから伝搬してくるものと新たにセル中で発生するものとの和として計算される。周期条件より、セルの先頭の点での dispersion が、セルの終わりの点（次のセルの先頭の点）の dispersion と等しいという式を立てると、

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} = M_{\mathrm{cell}} \begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_{\mathrm{cell}} \\ \eta'_{\mathrm{cell}} \end{pmatrix} \qquad (3\text{-}45)$$

となる。ここで、$\eta_{\mathrm{cell}}, \eta'_{\mathrm{cell}}$は、セル中で発生する dispersion で、上述の薄肉近似を用いると、

$$\begin{pmatrix} \eta_{\mathrm{cell}} \\ \eta'_{\mathrm{cell}} \end{pmatrix} = M_{\mathrm{cell}} \begin{pmatrix} 0 \\ \theta/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \theta/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & L/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k_d & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix} \qquad (3\text{-}46)$$

となる（問： これを示せ)。(3-45)より、

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} = \left(\mathrm{I} - \mathrm{M}_{\mathrm{cell}}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \eta_{\mathrm{cell}} \\ \eta'_{\mathrm{cell}} \end{pmatrix} \quad (3\text{-}47)$$

となる。(3-46)より求めたセル中で発生するdispersionを用いて、(3-47)を解くと、

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{L\theta}{2\left(1-\cos\mu\right)}\left(4 + K_d - K_f - \dfrac{K_d K_f}{4}\right) \\ \dfrac{\theta}{2\left(1-\cos\mu\right)}\left(K_d + K_f\right) \end{pmatrix} \quad (3\text{-}48)$$

が求まる。次に計算したいのは1セルあたりの H の二極電磁石中での積分である。ここで、文献[5]に従って、H の二極電磁石中での積分は、二極電磁石の入り口の H の値にその二極電磁石の長さをかけたものにほぼ等しいという近似を用いる。(3-48)で（近似的に）求めたdispersionはセルの入り口（または出口）の値で、二極電磁石の真ん中の値である。また、ここでのTwiss parameterは(3-44)で求まっている。従って、二極電磁石を二つに分けて、半分の二極電磁石の入り口での H は、

$$H = \gamma\eta^2 + 2\alpha\eta\eta' + \beta\eta'^2 \quad (3\text{-}49)$$

より計算される。ここで簡単のために、$K_d = K_f = K$ とすると、

$$\begin{aligned} \cos\mu &= 1 - K^2/2 \\ K &= 2\sin\frac{\mu}{2} \end{aligned} \quad (3\text{-}50)$$

となる。これらを用いて、また(3-44)と(3-48)より(3-49)を求めて、二極電磁石の長さ（L_B）の半分をかけることにより、セルの先頭から始まる長さ $L_B/2$ の二極電磁石中の H の積分が

$$\int_{L_B/2} H ds = \frac{L L_B \theta^2}{2} \frac{1 - \sin^2\dfrac{\mu}{2} + \dfrac{1}{8}\sin^4\dfrac{\mu}{2}}{\sin^3\dfrac{\mu}{2}\cos\dfrac{\mu}{2}} \quad (3\text{-}51)$$

と求まる。次に今計算した1/2の二極電磁石の残り半分での H の積分は、逆方向に積分することにより、(3-51)と同じになることが示せる（逆方向に粒子を走らせると η' の符号が逆転するが、α の符号も逆転し H の値は変わらない）。またセル中のもう一つの二極電磁石中の H の積分は、今計算した二極電磁石での積分と同じになることが、対称性から示せる。従って、セル全体での H の積分は、(3-51)の4倍で、

$$\int_{\mathrm{cell}} H ds = 2 L L_B \theta^2 \frac{1 - \sin^2\dfrac{\mu}{2} + \dfrac{1}{8}\sin^4\dfrac{\mu}{2}}{\sin^3\dfrac{\mu}{2}\cos\dfrac{\mu}{2}} \quad (3\text{-}52)$$

となることが分かる。また、セルあたりの二極電磁石の蹴り角は 2θ だから、リング全体のセル数は $(2\pi/2\theta) = \pi/\theta$ となる。従って、リングの二極電磁石を含むセル全部での H の積分は、(3-52)の π/θ 倍となる。(3-37)を用いてエミッタンスを計算すると、

$$\varepsilon_x = \frac{C_\gamma}{J_x}\gamma^2 \frac{L}{L_B}\theta^3 \frac{1 - \sin^2\dfrac{\mu}{2} + \dfrac{1}{8}\sin^4\dfrac{\mu}{2}}{\sin^3\dfrac{\mu}{2}\cos\dfrac{\mu}{2}} \quad (3\text{-}53)$$

となる（問：これを示せ）。この式を見ると、セル長（$2L$）と二極電磁石の蹴り角（θ）を変えず、二極電磁石の長さ（L_B）だけを変えると、L_B に逆比例してエミッタンスが小さくなることが分かる。これは、Fig. 15に関連して既に述べたことである。次に、二極電磁石の磁場の強さは変えずに、アーク部のセル数を変えることを考える。すると、セル数に逆比例してセル長（$2L$）、二極電磁石の長さ（L_B）、および二極電磁石の蹴り角（θ）が小さくなる。この時、セルあたりの位相の進み（μ）も変えないようにすると仮定すると、エミッタンスは、二極電磁石の蹴り角（θ）の3乗に比例して変化する。つまり、セル数の3乗に逆比例して、エミッタンスは小さくなる。では、この3乗依存性はどこから来るのであろうか？まず、磁場の強さを保ったまま一つ一つの二極電磁石の長さを短くすると蹴り角（θ）も小さくなり、(3-48)から分かるように、二極電磁石で発生するdispersionが θ に比例して小さくなる。従って、H の値は、θ の二乗に比例して変化する。これで

３乗依存性の２乗が説明できるが、あと１乗はどこから来るのであろうか？これは、より直接セル長に依存するものである。すなわち、セル長を短くしてセルあたりの位相の進みを保存すると、平均のベータ関数の値は小さくなる（位相の進みはβの逆数の積分であることに注意)。つまり、セル数を増やすと、セル中の収束力が強くなる。その結果、セル中で dispersion（η'）が発生する二極電磁石でのγの値が大きくなり、発生した dispersion の H への寄与が小さくなる。実際に、(3.52)よりセル当たりの H の積分は、セル長（の 1/2 の）L に比例することが分かる。このように、セル数を増やしてセル長を短くすることは、低エミッタンスビームを得るのに有効な方法の一つである。SuperKEKB では、HER の方は上述したように、二極電磁石の長さを長くして低エミッタンスを得るやり方が使えないので、セル数を増やすやり方を採用することが検討されたことがある。しかし、主に建設コストの問題から、このやり方の採用は見送られた。

次に、FODO セルの場合、位相の進み（μ）を変えることによっても、エミッタンスを変化させることができる。(3-53)において、μを含む項を微分して最小値を与えるμの値を求めると、

$$\mu \cong 145.4\ \mathrm{deg} \tag{3-54}$$

となる。さらに、TRISTAN MR のパラメータ（$2L$ = 16.12m, L_B = 5.86m, E_{beam} = 8GeV, θ = 0.0237646rad）を入れてグラフを書くと、

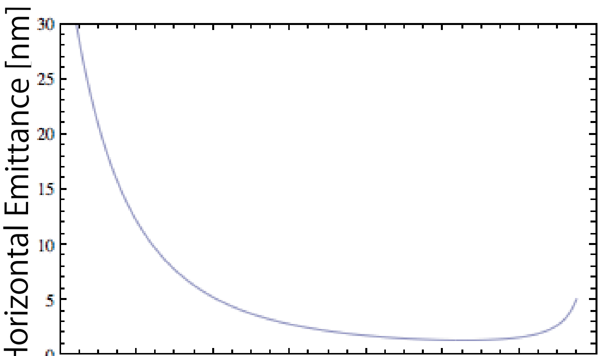

Fig. 18: 薄肉近似を用いた TRISTAN MR のエミッタンスの計算値（8GeV）

となる。最小値は、1.3nm 程度であるが、SAD を用いた正確な計算では、この値の２倍ぐらいになり、その程度の誤差がある。TRISTAN MR は、高エネルギー実験モードでは、アーク部のセルの位相の進みは 60° / 60° （水平／垂直）であったが、試験的に行われた放射光利用モードでは、90° / 90° で運転された。これはもちろん、低エミッタンスにするのが目的である。さらに位相の進みを増やせば、さらに低エミッタンスにできるが、（ここでは詳しくは述べないが）クロマティ補正の問題も出てくるので、この値に留めている。また、ここで計算したのはアーク部のセルで生じるエミッタンスについてである。TRISTAN MR ではウイグラー電磁石を用いていたので、アーク部だけではエミッタンスは決まらないことにも注意する必要がある。TRISTAN の放射光利用モードでは、ウイグラー電磁石の場所での dispersion を下げることによりエミッタンスを多少下げて運転していた。セルの位相の進みを増やすとエミッタンスが下がる理由は、やはりセル中の収束力が強くなってベータ関数の値が小さくなり、二極電磁石で発生する dispersion の H への寄与が小さくなることである。

FODO セルは、従来の加速器では多く用いられたが、最近の加速器、特に低エミッタンスが重要なマシンで用いられることはなくなった。低エミッタンスの放射光利用を目的としたマシンでは、DBA（Double Bend Achromat）や TBA (Triple Bend Achromat）と呼ばれるラティスを用いることが多い。これらは Achromat と言われるように、セルの入り口と出口で dispersion がゼロになるように設計される。DBA では、最初の二極電磁石で発生した dispersion が二番目の二極電磁石で消えるように設計されるので、二つの二極電磁石は dispersion の立ち上がりと立ち下がりの場所にあり、dispersion はかなり小さくなる。従って、二極電磁石の中での H の積分が小さくなり、低エミッタンスが得られる。TBA の場合は、DBA と同様の二極電磁石に加えて第三の二極電磁石をセル中央に配置し、その二極電磁石の場所での dispersion も小さくなるようにする。これらのラティスについては、本講義では扱わないので、興味がある学習者は文献[4]などで学習していただきたい。

2.5πセルラティス

KEKB では、2.5 πセルラティスと呼ばれる非常に特殊なラティスが採用され、SuperKEKB でも基

本的な変更はなく踏襲されている。このラティスは KEK オリジナルのものであり、現在までのところ、他のマシンで採用されたことはない。2.5 π セルは、90° （π/2）FODO セルを５つ結合し、１０台の二極電磁石を４台に集約したものと説明される。

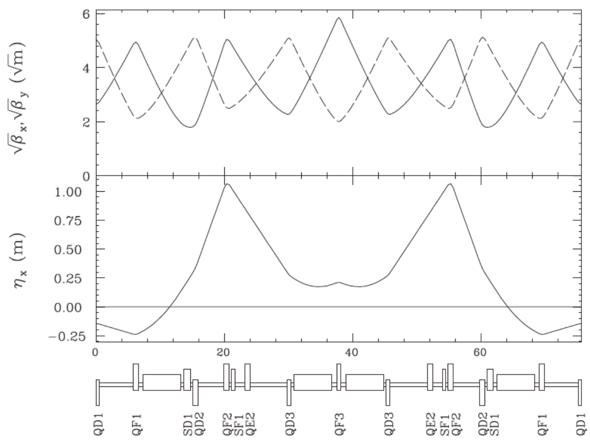

Fig. 19: 2.5πセル(HER)の構造

Fig. 19 に 2.5 πセルの構造を示す。この例は、KEKB の HER であるが､SuperKEKB では HER のアーク部のラティスはほとんど変更されないので、これは SuperKEKB の HER と思ってもよい。４台の二極電磁石のうち、二台はセルの両端近く、もう二台はセル中央付近に配置され、TBA のラティスにやや似て二極電磁石の場所では dispersion が小さくなるように dispersion のバンプ作られるようになっている。従って、低エミッタンスが可能である。セル中の四極電磁石の数は 13 台（左右対称で７自由度）であるが、これらの自由度は､セルあたりの位相の進みを 2.5 πに保つことに加えて、dispersion バンプの形を変えることにより、エミッタンスと momentum compaction factor（α）を広範囲で変更するのにも用いられる。Fig. 20 に dispersion バンプの形を変えてエミッタンスコントロールを行うやり方を示す。これ例は、KEKB の LER である。主に、二極電磁石での dispersion の値の違いにより、上の図ではε_x = 10nm、下の図では 36nm と変化させることができる。また、momentum compaction factor (α)も広い範囲で可変である。但し、αは

$$\alpha = \frac{1}{C}\oint \frac{\eta}{\rho} ds \qquad (3\text{-}55)$$

で計算される量であり、二極電磁石の中での dispersion の積分であるので、エミッタンスと相関がある。

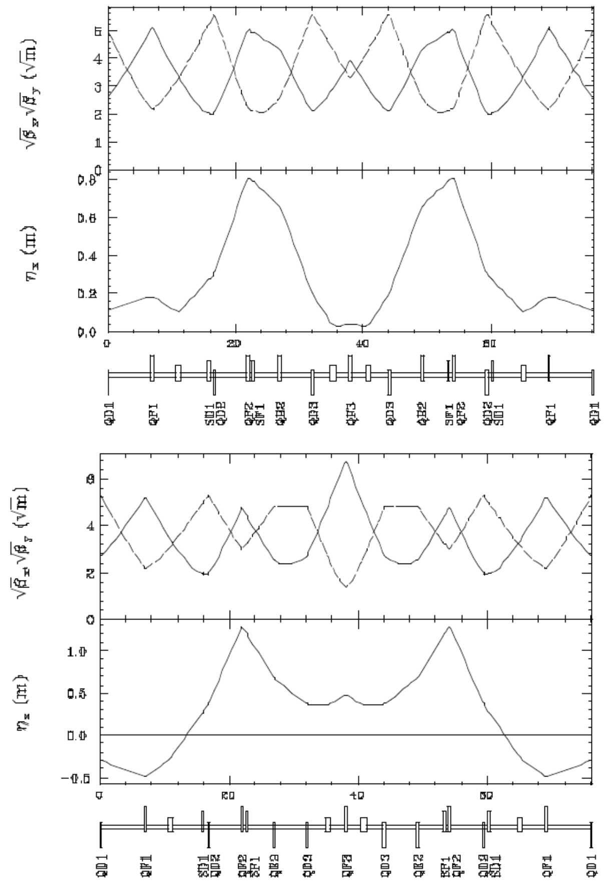

Fig. 20: KEKB LER でのエミッタンスコントロール

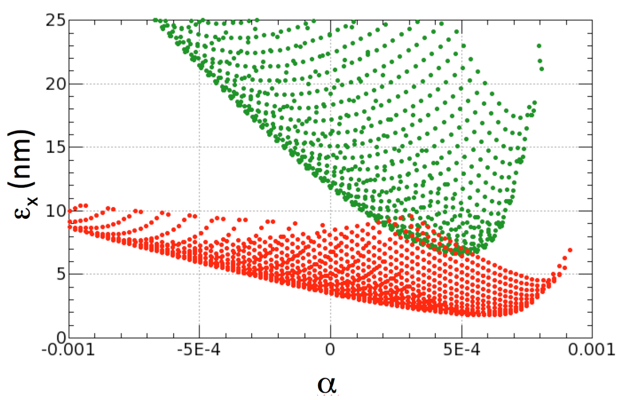

Fig. 21: 2.5πセルラティスによるエミッタンス(ε_x)と momentum compaction factor (α)の可変範囲。赤（図の下）：SuperKEKB LER、緑（図の上）：SuperKEKB HER

Fig. 21 に 2.5πセルラティスによるエミッタンス (ε_x)と momentum compaction factor (α)の可変範囲を示す。この例は、SuperKEKB の LER（赤、図の下）と HER（緑、図の上）である。LER の方がエミッタンスの下限値が小さいのは、上述のように二極電磁石の長さを変更したためである。ここで、momentum compaction factor について注意すべきことは、図から分かるようにエミッタンスと違い符号が負にもなりうることである。実際、KEKB では momentum compaction factor の符号を変えてマシンスタディを行い、その性能を調べた。但し、実用運転で negative αのラティスが用いられることはなかった。このように、2.5πセルラティスを用いると、セルあたりの位相の進みを変えることなく、広い範囲でエミッタンスを変化させることができ、下限の値はかなり小さくできる。一方 HER の方は、KEKB と同じラティスでは、2.5πセルラティスの可変範囲の下限値でも、エミッタンスがやや大きすぎるので、既に述べたようにセル数を増やすことで、エミッタンスを下げることが検討された。しかし、コストなどの理由からこの案は、採用されなかった。その代わり、以下に述べるように、KEKB では HER には存在しなかったウイグラー電磁石を設置し、エミッタンスをさらに下げることが計画されている。一方、LER の方は、KEKB 時代から多数のウイグラー電磁石を用いてきたが、SuperKEKB でも RF 空洞増設のために多少数が減るが、やはり多数のウイグラー電磁石を設置し、放射減衰時間を減らすとともに、エミッタンスを下げるのにも用いられる。

エミッタンスの制御と並んで重要なのは、momentum compaction factor の制御である。KEKB の運転で重要だったのは、αの絶対値をある程度小さくすることであった。これは一つには、Fig. 7 に関連して説明したように、αの値を小さくすることは、バンチ長を短くすることにつながるからである。前章で詳しく述べたように、通常バンチ長の値で衝突点でのβ_yの値の下限が決まっていて、この値がルミノシティに直結する。KEKB は SLAC の PEP-II との熾烈なルミノシティ競争を演じたが、PEP-II では伝統的な FODO セルを用いていたので、αの値をそれほど自由には変更できないという問題があった。最終的には、PEP-II でもセル当たりの位相の進みを 60 度から 90 度に変えることで、ある程度小さいαの値が達成されたが、それでも得られたバンチ長は 9mm 程度と、KEKB より長い値であった。KEKB が PEP-II との競争に勝った理由はいくつかあると思うが、非常にフレキシブルなこの 2.5πセルラティスの採用によるところも大きいと思う。αを小さくすべきもう一つの理由は、シンクロトロンチューン（ν_s) を小さくしたいことによる。KEKB の長期間にわたる運転の経験から、ルミノシティを上げるためには、水平方向のチューン（ν_x）を半整数に出来るだけ近づけることが非常に重要であることが分かった。その際、($2\nu_x+\nu_s$ = 整数) の共鳴線が非常に強く、ダイナミックアパーチャーの減少によるビーム寿命の低下のためこの線の近くでは運転ができず、この共鳴線が水平方向のチューンをどこまで半整数に近づけるかを決めていた。従って、ν_sを下げることにより、より半整数に近づけることになり、ルミノシティも上がることになる。この意味でも、2.5πセルラティスはルミノシティに貢献したと思われる。

2.5πセルラティスに関して、もう一つ述べておく必要があるのは、クロマティ補正に関してである。Fig. 19 の 1 セル中に六極電磁石は 4 台存在する。うち 2 台の SF（収束六極電磁石）はペアになっていて、同じ強さで励磁される。また、他の二台の SD（発散六極電磁石）は、次のセル（または前のセル）の別の SD とペアになっていて、ペアになる六極電磁石はやはり同じ強さで励磁される。また、ペアの間の transfer matrix は、

$$-I' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & m_{42} & -1 \end{pmatrix} \qquad (3\text{-}56)$$

となるように設計される。この $-I'$ のお陰で、六極電磁石の非線形成分がペア内でキャンセルされることになり、六極電磁石の非線形成分によるダイナミックアパーチャーの減少が防げる。但し、エネルギーがずれた粒子に対しては、$-I'$ の条件がずれてキャンセルが悪くなり、エネルギー方向のダイナミックアパーチェーが狭くなりがちである。これを補うために、六極電磁石の全てのペアの強さを独立にして自由度を増やしてクロマティ補正を行って、エネルギー方向のダイナミックアパーチャーを確保するというのがこの方式の特徴である。

3.2.3. 放射減衰を強くする

既に述べたように、放射減衰を強くしてエミッタンスを下げる方法には二つあるが、以下でそれらについて考えよう。

ダンピングウイグラー（damping wiggler）

これまでは、二極電磁石としてビーム軌道を閉じさせるためのものだけを考えてきた。これらの電磁石の蹴り角の和は軌道が閉じるという条件から 2π rad になる。二極電磁石はこの軌道を閉じさせるため以外にも様々な目的で用いられるが、エミッタンスに特に大きく影響するのは、ウイグラー電磁石である。ウイグラーは通常直線部に設置されるが、短い周期でビームを（通常）左右に振って（ウイグルさせ）大量の放射光を発生させるものである。ウイグラーは、放射光利用マシンで、挿入型光源として用いられる場合もあるが、高エネルギー実験用のマシンでは、その目的は放射減衰時間の短縮と、エミッタンスコントロールである。KEKB LER では、Nikko と Oho 直線部に大量のウイグラーを設置した。これらの直線部は、TRISTAN 時代にはビームを高エネルギー（>30GeV）に加速するために多数の RF 空洞が設置されたが、KEKB では必要な RF 空洞の台数が減ったため、空いたスペースにウイグラーが設置された。Fig. 22 に KEKB LER のウイグラー電磁石の設置の様子を示す。

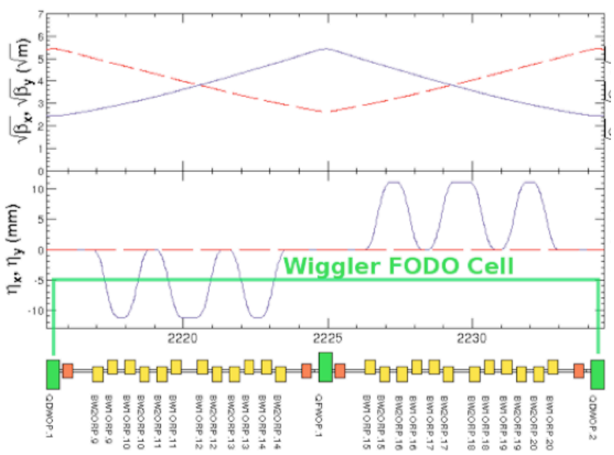

Fig. 22:: KEKB LER のウイグラー電磁石

KEKB LER のウイグラー電磁石は、磁場の強さは（従ってρも）、アークの二極電磁石と同じであり、磁極長の和は（設計値では）96m で、アークの二極電磁石の和とほぼ同じであった。磁場の強さが同じなので、ウイグラーの励磁でビームのエネルギー広がりが変化することはない。次に、放射減衰時間はウイグラーの磁極長の和がアーク部の二極電磁石とほぼ等しいため、約半分になる（問： これを示せ）。Fig. 22 にウイグラーの詳細が示されているが、一つの FODO セルの間に合計２４台のウイグラー電磁石が設置されていた。両端を除いて、二台ずつが同じ極性で励磁される。ウイグラーの周期は約 2 m である。この場合、dispersion のピークは約 10mm になり、アーク部よりかなり小さい。これは、二極電磁石の極性を交互に逆転させているためである。ウイグラー電磁石を用いた場合も、エミッタンスは(3-36)で与えられるが、少し書き直して、

$$\varepsilon_x = \frac{C_\gamma}{J_x}\gamma^2 \frac{\int_{Arc}\frac{H}{|\rho^3|}ds + \int_{Wiggler}\frac{H}{|\rho^3|}ds}{\int_{Arc}\frac{ds}{\rho^2} + \int_{Wiggler}\frac{ds}{\rho^2}} \qquad (3\text{-}57)$$

となる。KEKB LER の場合、分母の二つの項はほぼ等しい。分母がほぼ二倍になったので、分子の H の積分の項でウイグラーでの積分がアーク部の二極電磁石での積分より小さければ、エミッタンスは下がる。Fig. 22 で見て取れるように、ウイグラーでの dispersion はかなり小さいので、エミッタンスはかなり下がる。どれぐらい下がるかは、アーク部での H の積分との兼ね合いになる。このように、ウイグラー部での dispersion はかなり小さくできるが、わざとアーク部から dispersion を漏らして、dispersion を大きくすることもできる。その場合、エミッタンスを大きくすることも可能である。エミッタンスを小さくする目的で用いられるウイグラーをダンピングウイグラーと呼ぶが、KEKB ではそれほどは小さいエミッタンスが要求されなかったので、ウイグラーの主な目的は放射減衰時間を短くすることであった。また、HER はもともと放射減衰時間が短く、ウイグラーを用いた場合の LER とほぼ同じであったのと、設置場所もなかったので、ウイグラーは用いられなかった。

SuperKEKB の LER では、ビームエネルギーが KEKB の 3.5GeV から 4.0GeV に上がったことに加えて、ビーム電流が約二倍必要なことの両方で、RF 空洞の数を増やす必要がある。そのた

め、KEKB でウイグラーを設置していた場所を一部 RF 空洞用に明け渡す必要がある。その結果、ウイグラーの磁極長の総量が約 96m から約 84m に減少する。従って、その分放射減衰時間が長くなる。また、ウイグラーの周期を減らして dispersion をさらに下げることを考える。

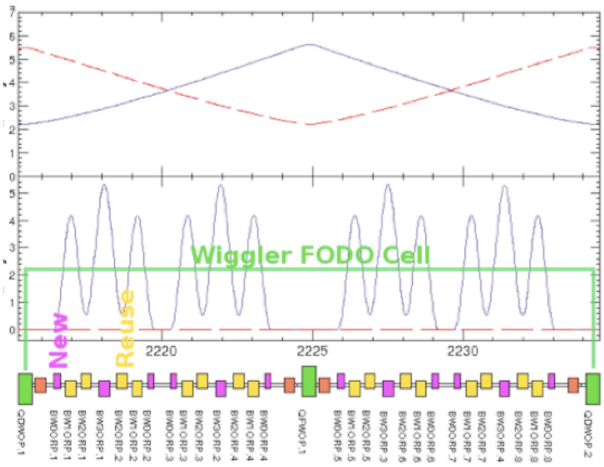

Fig. 23: SuperKEKB LER のウイグラー電磁石

Fig. 23 に SuperKEKB の LER のウイグラーの配置図を示す。KEKB のウイグラー電磁石は、磁極を二つ持つ double pole のものであった。SuperKEKB でもこれらは再利用するが、これらに加えて single pole のものと half pole のものを新作し設置する。配置は、図でも示されているように、half pole -> double pole (黄色) -> single pole -> double pole(黄色) -> half pole の順になる。また、KEKB では両端を除いて、pole が二つ続けて同じ極性になるようにしていたが、SuperKEKB では pole 一つずつ極性切り替える。こうすることによって、ウイグラーの磁場の周期が KEKB の半分になる。その結果、Fig. 23 から分かるように、dispersion のピークの値が、KEKB の約半分の 5mm 程度になる。SuperKEKB では、アーク部の H の積分を可能な限り小さくなるように、二極電磁石での dispersion を小さくするようにチューニングするので、(3-57)の分子のウイグラーからの積分をできるだけ小さくしないと、ウイグラーのエミッタンスへの効果が小さくなるのである。LER では、既に述べたアーク部の二極電磁石長さを長くすることとこのように設計されたダンピングウイグラーの効果で、エミッタンスを 1.9nm 程度に下げることができる。しかし、バンチ電流が設計値まで増えると、intra-beam scattering の効果でエミッタンスは 3.2nm 程度まで増えてしまう。これが、LER のエミッタンスの設計値である。次に、HER であるが、2.5πセルラティスの dispersion のチューニングで到達できる最小のエミッタンスは 5.3nm 程度である。できれば、さらに下げたいので、SuperKEKB では HER にもダンピングウイグラーを設置することが計画されている。HER は KEKB ではビームエネルギーが 8.0GeV であったが、SuperKEKB では 7.0GeV に下がるため、Oho 直線部の一部区間を RF 空洞用からウイグラー用に転用できる。この区間に LER から取り払われたウイグラーを設置する予定である。

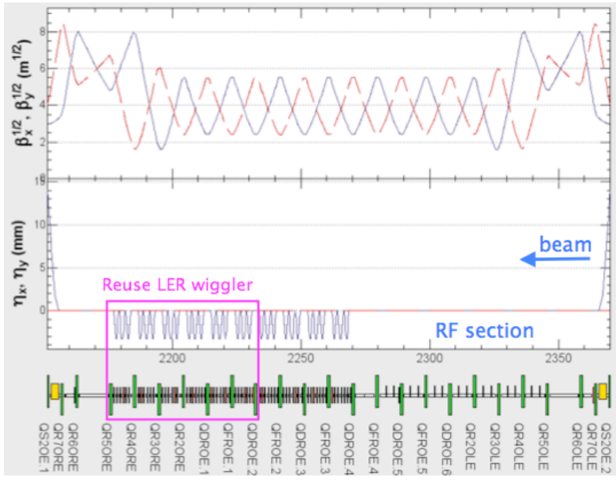

Fig. 24: SuperKEKB LER のウイグラー電磁石

Fig. 24 に SuperKEKB の HER のウイグラーの配置図を示す。図に示されているウイグラーを設置可能な１０区間のうち、６区間は LER のウイグラーを転用することで埋め尽くすことができる。この区間のウイグラーの効果で、エミッタンスは 5.3nm から 4.6nm まで下げることができる。残り４区間を埋めるには、ウイグラーを新作する必要があるが、この区間を埋めるとエミッタンスは 4.3nm までさらに下げることができる。現在の SuperKEKB の設計では、4.6nm をエミッタンスの設計値と考えていて、運転開始がさらに必要があれば、残り４区間にウイグラーを設置することを考えるという方針を取っている。

Damping partition number

放射減衰を強くしてエミッタンスを下げるもう一つの方法は、(3-36)において J_x を大きくすることである。J_x は(3-29)、(3-30) で定義された damping partition number である。まず、電磁

石が Combined 型ではない場合、(3-29)の D の分子の第一項はゼロになる。この場合、

$$D = \frac{\bar{\eta}_x}{\rho} \qquad (3\text{-}58)$$

となる。ここで $\bar{\eta}_x$ は dispersion の二極電磁石中での平均値で、ρは全て等しいと仮定した。通常、この量は 1 に比べて非常に小さな数であり、無視できる。しかし、RF 周波数を標準値からずらしていくと、dispersion がゼロでない場所にある四極電磁石が、Combined 型の電磁石として働き、D の値が無視できなくなる。RF 周波数をずらすとビームのエネルギーも変化し、

$$\frac{\Delta E}{E} = -\frac{1}{\alpha}\frac{\Delta f_{RF}}{f_{RF}} \qquad (3\text{-}59)$$

となる。この時 D は、

$$D = D_0 + \frac{\oint 2K^2\eta_x^2\,ds}{\oint \frac{1}{\rho^2}ds}\frac{\Delta p}{p} \qquad (3\text{-}60)$$

と変化する。D_0 は周波数を変更する前の値である。従って、

$$\frac{\partial D}{\partial(\Delta p/p)} = \frac{\oint 2K^2\eta_x^2\,ds}{\oint \frac{1}{\rho^2}ds} \qquad (3\text{-}61)$$

が得られる。この式から RF 周波数をずらした時の damping partition number の変化が計算できる。

Damping partition number が変化すれば、エミッタンスも変化するが、この方法で実際にエミッタンスをコントロールしていたマシンとしては、TRISTAN MR がある。TRISTAN MR の物理実験用の optics では、

$$\frac{\partial D}{\partial(\Delta p/p)} \cong 272 \qquad (3\text{-}62)$$

であった。また、TRISTAN のパラメータ、$\alpha = 1.49 \times 10^{-3}$、$f_{RF} = 508$MHz を用いると、

$$\begin{aligned} J_x &\cong 1 + 0.36\Delta f_{RF}[\mathrm{kHz}] \\ J_e &\cong 2 - 0.36\Delta f_{RF}[\mathrm{kHz}] \end{aligned} \qquad (3\text{-}63)$$

となる。これらから、RF 周波数を約 5.5kHz 上げるとシンクロトロン振動が anti-damping になり、約 2.8kHz 下げるとベータトロン振動が anti-damping になることがわかる。29GeV の物理実験の際、RF 周波数をずらさない場合は、

$$\begin{aligned} \tau_x &\cong 2.3\mathrm{ms} \\ \tau_y &\cong 2.3\mathrm{ms} \\ \tau_\varepsilon &\cong 1.15\mathrm{ms} \\ \varepsilon_x &\cong 1.65\times10^{-7}\mathrm{m} \\ \sigma_\varepsilon / E &\cong 1.6\times10^{-3} \\ \sigma_z &\cong 10\mathrm{mm} \end{aligned} \qquad (3\text{-}64)$$

であったが、実際の運転では RF 周波数を 3kHz ずらして運転していた。この場合、

$$\begin{aligned} \tau_x &\cong 1.1\mathrm{ms} \\ \tau_y &\cong 2.3\mathrm{ms} \\ \tau_\varepsilon &\cong 2.5\mathrm{ms} \\ \varepsilon_x &\cong 0.80\times10^{-7}\mathrm{m} \\ \sigma_\varepsilon / E &\cong 2.3\times10^{-3} \\ \sigma_z &\cong 15\mathrm{mm} \end{aligned} \qquad (3\text{-}65)$$

となっていた。このように、周波数をずらすことにより TRISTAN では、エミッタンスを約半分にして運転していた（但し、このエミッタンスの計算には周波数をずらしたことによる optics のゆがみの H への寄与は考慮されていない）。TRISTAN では、ルミノシティの主要な制限は入射エネルギー（8.0GeV）での（モードカップリング不安定性によるものと思われる）バンチ電流の制限であり、ビーム・ビーム効果の制限は弱かった。このようの状況では、エミッタンスを下げることがルミノシティを上げることに直接寄与するので、こういう運転をしていたわけである。しかし、この方法でエミッタンスを下げると、その反動でビームのエネルギー拡がりは増え、バンチ長は長くな

る。また、optics のゆがみによる（ビーム寿命等の）ビーム性能の劣化の可能性もある。このような理由から、SuperKEKB でこの方法を用いてエミッタンスを下げることは考慮されていない。

4．SuperKEKB のマシンパラメータ

SuperKEKBの設計の基本的な考え方、特にNano Beam scheme と低エミッタンスについて、前章までに解説した。本章では、それらのパラメータも含めて、SuperKEKB の基本パラメータがどのように決まっているかを概説する。内容は、基本的に文献[6]と同じである。

4.1 基本パラメータ

ルミノシティの基本公式(2-6)に含まれる４つのパラメータ、ビームエネルギー、ビーム・ビームパラメータ、ビーム電流、衝突点の垂直ベータ関数（ビームサイズ比aは非常に小さく無視できると仮定する）をどう取るかが、まず問題である。これらのパラメータを Table 2 に示す。

Table 2 KEKB と SuperKEKB の基本パラメータ

	KEKB (達成値) LER/HER	SuperKEKB (設計値) LER/HER
Energy[GeV]	3.5 / 8.0	4.0 / 7.0
β_y^*[mm]	5.9 / 5.9	0.27 / 0.30
ξ_y	0.129 / 0.090	0.088 / 0.081
I[A]	1.64 / 1.19	3.60 / 2.60
Luminosity [10^{34}cm^{-2}s^{-1}]	2.11	80

Table 2 に見られるように、Nano Beam scheme 採用の結果、垂直ベータ関数が KEKB に比べてほぼ 1/20 になり、これだけでルミノシティが２０倍になる計算になる。また、垂直ビーム・ビームパラメータは KEKB での達成値と同じぐらいの値を仮定している。そして、ルミノシティの設計値 8×10^{35}cm^{-2}s^{-1} を達成するには、KEKB で達成されたビーム電流に比べて約２倍高い値が必要である。以上が、基本パラメータである。より詳細なパラメータは、Table 3 に示した。以下で、これらをもう少し詳しく説明する。

4.2 エミッタンス、交差角、衝突点でのベータ関数

これらのパラメータは、第２章、第３章で詳しく解説した主に Nano Beam scheme に関するものである。説明は繰り返さないが、少し補足しておく。

まず、第２章でβ_y^*の最小値は hourglass 効果で制限されることを強調した。これがもちろん話の大筋であるが、β_y^*の最小値を制限する効果は他にもある。その中でもっとも厳しいものは、ダイナミックアパーチャーの減少である。ダイナミックアパーチャーに関しては、本講義では扱わないが、６次元位相空間 (x, x', y, y', δ ($=\Delta E/E$), τ(時間遅れ)）での粒子の運動の安定領域を意味する。このダイナミックアパーチャーは、真空チェンバーなどできまる物理アパーチャーより狭くなることもあり得る。SuperKEKB では、β_y^*を極端に絞るが、その結果ダイナミックアパーチャーが極端に狭くなる。その理由は、衝突点付近で発生した巨大なクロマティシティを補正するための六極電磁石の非線形性、衝突点付近の四極電磁石のフリンジフィールドや漏れ磁場、衝突点付近の所謂 kinematic 項などである。いずれも、β_y^*を極端に絞ったことに起因している。ダイナミックアパーチャーが極端に狭いと、Touschek 効果によるビーム寿命が短くなり、極端な場合はビーム寿命でなくなった粒子を入射器で補えなくなる。Touschek 効果も本講義では扱わないが、バンチ内の粒子同士のクーロン散乱で粒子間のエネルギートランスファーが起こり（一方の粒子のエネルギーが上がり、他方は下がる）、その結果、ダイナミックアパーチャーの範囲外に飛び出して、それらの粒子が失われてしまうという効果である。Dispersion がある場所でエネルギーが変化すると、第３章で見たようにベータトロン振動が励起されるので、主な問題は水平ーエネルギー方向のダイナミックアパーチャーである。Table 1 に hourglass 効果に関連するパラメータが示されているが、有効バンチ長は 0.24mm に対して、β_y^*は0.27mm でもう少し絞れそうである。あるいは、β_x^*をもう少し絞ればさらに有効バンチ長が短くなり、hourglass 効果の制限が緩くなり、さらにβ_y^*を絞れると思われるかもしれない。しかし、ダ

Table 3 SuperKEK の設計パラメータ　()内の数字は電流ゼロに対応

		LER (e+)	HER (e-)	Units
Beam Energy	E	4.000	7.007	GeV
Half Crossing Angle	ϕ_c	41.5		mrad
Emittance	$\varepsilon_x/\varepsilon_y$	3.2(1.9)/8.64(2.8)	4.6(4.4)/11.5(1.5)	nm/pm
Emittance ratio	κ	0.27	0.28	%
Beta Function at the IP	β_x^*/β_y^*	32/0.27	25/0.30	mm
Damping time	$\tau_{x,y}/\tau_e$	43.1/21.6	58.0/29.0	ms
Betatron tune	ν_x/ν_y	44.53/44.57	45.53/43.57	
Momentum Compaction	α	$3.25\mathrm{x}10^{-4}$	$4.55\mathrm{x}10^{-4}$	
Energy Spread	σ_e	$8.08(7.73)\mathrm{x}10^{-4}$	$6.37(6.31)\mathrm{x}10^{-4}$	
Beam Current	I	3.6	2.6	A
Number of Bunches/ring	n_b	2500		
Energy Loss/turn	U_0	1.87	2.43	MeV
Total Cavity Voltage	Vc	9.4	15.0	MV
Synchrotron Tune	ν_s	-0.0247	-0.0280	
Bunch Length	σ_z	6.0(5.0)	5.0(4.9)	mm
Beam-Beam Parameter	ξ_y	0.0028/0.0881	0.0012/0.0807	
Luminosity	L	8×10^{35}		$\mathrm{cm}^{-2}\mathrm{s}^{-1}$

イナミックアパーチャーの制限が厳しく、β_y^*やβ_x^*をさらに絞ることは難しそうである。従って、現在の SuperKEKB のパラメータでは、β_y^*は hourglass 効果で制限されているというよりは、ダイナミックアパーチャーで制限されていると言った方がよいと思う。また、交差角もダイナミックアパーチャーと関連がある。SuperKEKB では、交差角は KEKB の約４倍大きな値になっている。このことは、有効バンチ長を縮めるのにも効果があるが、それ以外に衝突点付近の電磁石等の設計に影響する。交差角を大きくすると、KEKB では電子ビームと陽電子ビームで共用していた衝突点に最も近い四極電磁石（final focus quadrupole）を独立にし、衝突点に近づけることができる。一般に衝突点に四極電磁石を近づけると、ダイナミックアパーチャーは広がる。また、final focus quadrupole を独立にすると、ビームが四極電磁石をオフセンターで通過して放出する放射光を減らせるので、Belle II 検出器へのバックグラウンドノイズも減らせるなど、衝突点付近の設計はかなり入り組んでいて、複雑である。他方、交差角を増やすと、x-y カップリング（emittance ratio）の値を非常に小さくしないと、ビーム・ビームパラメータの設計値が得られないという問題がある。現在の emittance ratio の設計値は、KEKB では実験的に得られたことがないほど小さい値（KEKB での実測値は 1%程度）なので、この小さい値が達成できるかどうかが大きな問題になりうる。

4.3 ビームエネルギー

KEKB では、ビームエネルギーは LER(3.5GeV)、HER(8.0GeV)であった。SuperKEKB では、エネルギーが変更され、LER(4.0GeV)、HER(7.0GeV)になる。エネルギーが非対称な理由は、物理サイ

ドからの要請である。B ファクトリーでは、大量の B 中間子が生成されるが、エネルギーが対称なマシンで（Y(4S)共鳴上で）B 中間子を作ると、B 中間子はほぼ静止した状態で生成される。これに対して、エネルギーが非対称なマシンでは B 中間子は初期速度を持って生成される。この場合、B 中間子が崩壊した場所を測定することにより、その B 中間子が崩壊した時間が分かる。より正確には、同時に生成される二つの B 中間子の崩壊した時間の差が重要である。この時間情報は CP 対称性の破れの検出には決定的に重要であった。SuperKEKB でも CP 非対称性に関する実験は継続されるが、このような時間情報を使う実験の場合、ビームエネルギーの非対称度を KEKB の(3.5/8.0)から SuperKEKB の(4.0/7.0)に変更すると、ルミノシティにして 25%~30%程度損をするというシミュレーション結果が出ている。これは、エネルギー非対称度が小さいと、生成された B 中間子の初期速度が遅くなり、崩壊場所の検出精度に由来する崩壊時間（の差）の測定精度が悪くなるからである。但し、Belle II で行われる実験全てで、時間情報が重要というわけではない。エネルギー非対称度が大きいと、B 中間子が崩壊して生成される別の粒子が前方へブーストされ、Belle II のアクセプタンスに入らない割合が増える。SuperKEKB のエネルギーの場合、B 中間子が崩壊して生成される粒子を全て測定してイベントを再構成する full reconstruction の成功確率が KEKB の場合に比べて約 6%向上するというシミュレーション結果も得られている。しかし、物理実験としては、エネルギー非対称度が大きい方が望ましいことは確かである。それにもかかわらず、SuperKEKB でエネルギー非対称度を下げる理由は、加速器サイドにある。既に述べたように、SuperKEKB ではダイナミックアパーチャーが狭く、Touschek 効果によるビーム寿命短縮の問題が深刻である。Touschek 効果によるビーム寿命は、ダイナミックアパーチャーが同じでかつビームサイズも同じとすると、ビームエネルギーの 3 乗に比例して長くなる。従って、Touschek 効果がより深刻な LER のビームエネルギーを 3.5GeV から 4.0GeV に上げる決断がなされた。もうひとつ、SuperKEKB は非常に低エミッタンスのマシンであるが、intra-beam scattering により（バンチ電流が増えると）エミッタンスが増えるという問題も深刻である。この問題もビームエネルギーを上げることで緩和される。以上が、ビームエネルギー変更の主な動機である。

このエネルギー非対称度の変更の結果、HER のエネルギーは下がることになり、(3-36)より分かるように、エミッタンスも下がる。HER は低エミッタンス化が LER より難しいので、これはよい方向である。また、放射光のパワーはエネルギーの 4 乗に比例するので、大幅に下がる。その結果、SuperKEKB でビーム電流が増えても、HER の真空チェンバーは KEKB のままのものが使えることになり、大幅なコストダウンが可能になる。

4.4 ビーム・ビームパラメータ

ビーム・ビームパラメータの設計値は、KEKB で達成された値（~0.09）を取っているので、この設計値は保守的だと見えるかもしれない。しかし、KEKB で達成された値は、Crab 空洞を用いて実質的に正面衝突の状態で達成されたものである。交差角衝突の場合、一般にビーム・ビームパラメータは下がることが予想される。従って、SuperKEKB ではこの設計値の達成には相当な困難が予想される。特に、SuperKEKB では交差角が KEKB の 4 倍以上大きくなるので、この点が心配である。Crab Waist はビーム・ビームパラメータを上げるのに効果がありそうだが、この方式を導入するために、まずダイナミックアパーチャーを広げる方法を開発する必要がある。SuperKEKB では Crab Waist scheme はバックアップのオプションという位置づけである。但し、Crab Waist を用いない状態でも、シミュレーション上は設計値のビーム・ビームパラメータは達成できるという結果が得られている。ただ、このシミュレーションは strong-weak モデルに基づくもので、より正しいと思われる strong-strong モデルに基づくシミュレーションは、現在進行中である。Table 3 に示されたベータトロンチューンの設計値は、ビーム・ビームシミュレーションでチューン探索を行った結果得られた値である。KEKB のように水平チューンを半整数に近づけるのがよいわけではない。その理由ははっきりしていて、KEKB のように極端に水平チューンを半整数に近づけると、ビーム・ビーム効果に起因するダイナミックエミッタンスの効果でエミッタ

ンスが増大し、Nano Beam scheme の条件を崩してしまうからである。

4.5 ビーム電流

これまで述べたβ_y^*を縮める努力やかなり高いξ_yを用いても、ルミノシティの設計値を得るためには、ビーム電流は KEKB の約２倍にする必要がある。このためには、大幅な RF システムの増強が必要である。また、大電流によるビーム不安定性への対策も重要で、特に KEKB で問題になった LER（陽電子リング）の電子雲の問題には根本的な対策がなされる。また、ダイポールモードのビーム不安定性を抑制するためのフィードバックシステムも増強される。特に、RF 空洞に起因する不安定性を抑制するために、KEKB では必要がなかった longitudinal 方向のフィードバックシステムを LER に導入する必要がある。但し、Nano Beam scheme を採用する前のビーム電流の設計値は、LER(9.4A)、HER(4.1A)であり、この電流に向けて各種ハードウエアーの R&D がなされて来ており、その成果を使うことができる。

リング当たりのバンチ数は約 2500 である。これは、２バケットおきにビームを入射することを意味する。バンチ数をいくつにするかは、いろいろなパラメータと関係がある。例えば、バンチ数を減らしてバンチ電流を増やすと、ビーム・ビームパラメータは上がるので、x-y カップリング（emittance ratio）は大きくてもよくて、オプティックス補正の困難が緩和される（バンチ長についても同様の議論が成り立つ)。しかし、バンチ電流が増えると、ハードウエアーの HOM の問題が深刻になる。また、microwave instability などの single bunch instability や intra-beam scattering によるエミッタンスの増大などの問題も深刻になる。Table 2 で(　)内の値は、バンチ電流がゼロの時の値で、バンチ電流が増えるに従っていくつかの効果で、値が増える。エミッタンスに関しては、上述のように intra-beam scattering、バンチ長とエネルギー拡がりに関しては、microwave instability が原因である。Microwave instability については、特に CSR(Coherent Synchrotron Radiation)によるインピーダンスの寄与が大きい。Microwave instability については、バンチ電流が高く、ビームエネルギーが低い LER の方が深刻である。しかしながら、設計値の 2500 バンチであれば、これらの問題があっても、Table 3 の設計値は達成できることがシミュレーションで示されている。

参考文献

[1] 神谷幸秀 OHO ’84「加速器の原理」

[2] 船越義裕 OHO’ 94「電子貯蔵リングにおけるビームダイナミックスの基礎」

[3] P.Raimondi, 2nd SuperB Workshop, Frascati, (2006).

[4] 大見和史 OHO ’91「低エミッタンスリング」

[5] A. Wrulich, Particle Accelerator, 22, 257, (1988).

[6] Belle II Technical Design Report, KEK Report 2010-1, (2010).

Appendix A Crab Waist scheme が成り立つための条件

2.5 節で、Crab Waist の概念的な説明をした。ここでは、Crab Waist が成り立つためにどのように六極電磁石を配置すればよいのかを説明する。まず、六極電磁石について簡単に説明する。六極電磁石による磁場は、

$$B_x = axy \qquad B_y = \frac{1}{2}a\left(x^2 - y^2\right) \tag{A-1}$$

で与えられる。ここで、a は、磁場の強さを表す定数である。次に、

$$B'' = \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} = a \tag{A-2}$$

を用いて、六極電磁石の強さを表す次の量を定義する。

$$K_2 = \frac{B''L}{B\rho} \tag{A-3}$$

ここで、L は磁石の有効長である。ここで、六強電磁石による垂直方向の蹴り角を考えると、

$$\Delta y' = \frac{B_x L}{B\rho} = K_2 xy \tag{A-4}$$

となる（問 これを示せ）。この式をよく見ると、x を定数と思うと、この力は収束電磁石の力と同じであることに気がつくであろう。つまり、水平方向にずれて六極電磁石を通過粒子は垂直方向には、収束力を感じる。この収束力を利用してwaist をずらすわけである。簡単のために、ここでも thin lens （薄肉レンズ）近似を用いると、六極電磁石による垂直方向のキックは transfer matrix

$$\mathrm{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ K_2 x & 1 \end{pmatrix} \tag{A-5}$$

を用いて表される。

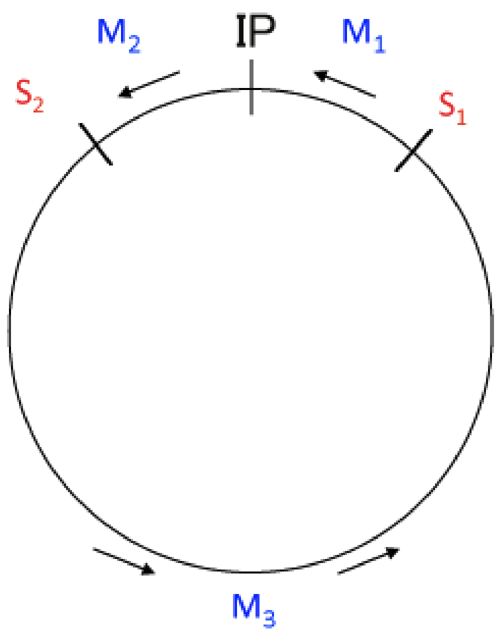

Fig. 25: Crab Waist 用の六極電磁石の配置

次に、Fig. 25 にように、二台の六極電磁石 S_1, S_2 をリングの衝突点（IP）を挟んで配置することを考える。リング一周の transfer matrix は、六極電磁石を境界にして３つ分け、

$$\mathrm{M}_0 = \mathrm{M}_1\mathrm{M}_3\mathrm{M}_2 \tag{A-6}$$

とする。S_1,によるキックの影響が S_2 でキャンセルするようにするために、S_1, S_2 間の transfer matrix を水平垂直とも、I または $-I$ になるようにする。どちらでも同様の議論が成り立つが、ここでは 2.5π セルラティスで用いられる六極ペアに準じて $-I$ を考えると、

$$\mathrm{M}_2 = -\mathrm{M}_1^{-1} \tag{A-7}$$

となる。この時 S_1 の直前から S_2 の直後までの transfer matrix は、

$$\mathrm{S}_2\mathrm{M}_2\mathrm{M}_1\mathrm{S}_1 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ K_2\left(S_1\right)x_1 + K_2\left(S_2\right)x_2 & 1 \end{pmatrix} \tag{A-8}$$

となる。ここで、x_1, x_2 は、S_1, S_2 での粒子の水平位置である。水平方向も、transfer matrix は $-I$ であるので、

$$x_2 = -x_1 \tag{A-9}$$

である。六極電磁石によるオプティックスのずれが六極電磁石ペアの間に局所化するためには、(A-8)が $-I$ に等しくなる必要がある。従って、

$$K_2\left(S_1\right) = K_2\left(S_2\right) \tag{A-10}$$

が要求される。この結果、

$$\mathrm{S}_2 = \mathrm{S}_1^{-1} \tag{A-11}$$

となる。次に、IP から始まるリング一周の transfer matrix を考える。まず、六極電磁石がない場合は、(A-6)で与えられるが、この matrix は、(3-39)より衝突点の Twiss parameter を用いて、

$$\mathrm{M}_0 = \begin{pmatrix} \cos\mu + \alpha_y^* \sin\mu & \beta_y^* \sin\mu \\ -\gamma_y^* \sin\mu & \cos\mu - \alpha_y^* \sin\mu \end{pmatrix} \tag{A-12}$$

となる。これを書き直して、

$$\mathrm{M}_0 = \cos\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin\mu \begin{pmatrix} \alpha_y^* & \beta_y^* \\ -\gamma_y^* & -\alpha_y^* \end{pmatrix} \tag{A-13}$$

が得られる。次に、S_1, S_2 が存在する場合のリング一周の transfer matrix は、

$$\mathrm{M} = \mathrm{M}_1 \mathrm{S}_1 \mathrm{M}_3 \mathrm{S}_2 \mathrm{M}_2 \tag{A-14}$$

で与えられるが、変形して、

$$\begin{aligned} \mathrm{M} &= (\mathrm{M}_1 \mathrm{S}_1 \mathrm{M}_1^{-1}) \mathrm{M}_1 \mathrm{M}_3 \mathrm{M}_2 (\mathrm{M}_2^{-1} \mathrm{S}_2 \mathrm{M}_2) \\ &= (\mathrm{M}_1 \mathrm{S}_1 \mathrm{M}_1^{-1}) \mathrm{M}_0 (\mathrm{M}_2^{-1} \mathrm{S}_2 \mathrm{M}_2) \end{aligned} \tag{A-15}$$

となる。ここで、(A-7)、(A-11)を用いると、

$$\mathrm{M} = \mathrm{M}_{1S} \mathrm{M}_0 \mathrm{M}_{1S}^{-1} \tag{A-16}$$

となる。ここで、

$$\mathrm{M}_{1S} = \mathrm{M}_1 \mathrm{S}_1 \mathrm{M}_1^{-1} \tag{A-17}$$

である（問 (A-16)を示せ）。(A-13)と(A-17)より、

$$\begin{pmatrix} \alpha_{yS}^* & \beta_{yS}^* \\ -\gamma_{yS}^* & -\alpha_{yS}^* \end{pmatrix} = \mathrm{M}_{1S} \begin{pmatrix} \alpha_y^* & \beta_y^* \\ -\gamma_y^* & -\alpha_y^* \end{pmatrix} \mathrm{M}_{1S}^{-1} \tag{A-18}$$

が得られる。ここで、S が付いているパラメータは、六極電磁石を用いた場合のものである。この式が、六極電磁石による衝突点での Twiss parameter の変化を示す。では、(A-18)を具体的に計算してみよう。まず、M_1 は(3.38)を用いて表現することができる。ここで S_1 から IP までの垂直方向の位相の進みが問題であるが、ここでは μ=π/2 の場合と、μ=πの場合を考える。まず、μ=π/2 の（奇数倍の）場合を考えよう。

μ=π/2 の場合

衝突点でのαはゼロと仮定すると、

$$\mathrm{M}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{yS1}\sqrt{\dfrac{\beta_y^*}{\beta_{yS1}}} & \sqrt{\beta_{yS1}\beta_y^*} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{\beta_{yS1}\beta_y^*}} & 0 \end{pmatrix} \tag{A-19}$$

となる。これを用いて、

$$\mathrm{M}_{1s} = \mathrm{M}_1 \mathrm{S}_1 \mathrm{M}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -K_2\left(S_1\right)\beta_{yS1}\beta_{y0}^* x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{A-20}$$

を得る。(A-20)と(A-18)より六極電磁石を用いた場合の衝突点での Twiss parameter が求められる。この方法でよいが、(A-18)と同等な以下の式を用いることもできる。

$$\begin{pmatrix} \beta_{yS}^* & -\alpha_{yS}^* \\ -\alpha_{yS}^* & -\gamma_{yS}^* \end{pmatrix} = \mathrm{M}_{1S} \begin{pmatrix} \beta_y^* & -\alpha_y^* \\ -\alpha_y^* & -\gamma_y^* \end{pmatrix} \mathrm{M}_{1S}^t$$

(A-21)

(A-18)と(A-21)は同等であることが証明できるので、どちらを用いても結果は同じであるが、(A-21)の方が、逆行列を求めなくてもよいので、少しだけ計算が簡単である。以下では、(A-21)の方を用いることにする。(A-20)、(A-21)より、

$$\begin{pmatrix} \beta_{yS}^* & -\alpha_{yS}^* \\ -\alpha_{yS}^* & -\gamma_{yS}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_y^* + \dfrac{\left(K_2\left(S_1\right)\beta_{yS1}\beta_y^* x_1\right)^2}{\beta_y^*} & -K_2\left(S_1\right)\beta_{yS1}x_1 \\ -K_2\left(S_1\right)\beta_{yS1}x_1 & \dfrac{1}{\beta_y^*} \end{pmatrix}$$

(A-22)

となる。これで、衝突点での Twiss parameter が求まった。次に、waist のずれの量を計算する必要がある。その計算も、これまでやった方法とよく似たやり方でできる。いま、リングのある場所 A から始まるリング一周の transfer matrix を $\mathrm{M_A}$ とする。次に、リングの別の点 B を考え、B から始まるリング一周の transfer matrix を $\mathrm{M_B}$ とする。また点 A から点 B までの transfer matrix を $\mathrm{M_{AB}}$ とすると、

$$\mathrm{M_B} = \mathrm{M_{AB}^{-1}} \mathrm{M_A} \mathrm{M_{AB}} \qquad \text{(A-23)}$$

となる（問　これを示せ。）。これは、(A-16)と同じ形をしているので、点 B の Twiss parameter は点 A の Twiss parameter と $\mathrm{M_{AB}}$ を用いて、(A-18)または、(A-21)と同等の式を用いて求められる。衝突点の Twiss parameter は(A-22)で求められているので、衝突点から直線で s だけ進んだ点 P での Twiss parameter を求める。衝突点からこの点までの transfer matrix は、

$$\mathrm{M_{IP \to P}}\left(s\right) = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(A-24)}$$

である。(A-21)、(A-22)、(A-24)より、点 P での Twiss parameter を求めて、β 関数の部分だけ書くと、

$$\beta\left(s\right) = \beta_y^* + \frac{\left(s - K_2\left(S_1\right)\beta_{yS1}\beta_y^* x_1\right)^2}{\beta_y^*} \qquad \text{(A-25)}$$

となる（問　これを示せ）。この式より、waist の移動量は、

$$\Delta s = K_2\left(S_1\right)\beta_{yS1}\beta_y^* x_1 \qquad \text{(A-26)}$$

であり、また、β 関数の最小値は、六極電磁石がない場合と同じになることがわかる。ここで、x_1 は六極電磁石 $\mathrm{S_1}$ での x の値であるので、衝突点の x に比例して waist をずらすためには、六極電磁石 $\mathrm{S_1}$ -> 衝突点の水平方向の位相の進みが $n\pi$ である必要があることが分かる。さて、Crab Waist で waist をずらしたい量は、交差角で決まり Fig. 18 より

$$\Delta s_{CW} = \frac{x_{IP}}{\tan 2\phi} \cong \frac{x_{IP}}{2\phi} \qquad \text{(A-27)}$$

である（問　これを示せ）。また、六極電磁石 $\mathrm{S_1}$ -> 衝突点の水平方向の位相の進みが $n\pi$ であるので、(3-38)より

$$\frac{x_{IP}}{x_1} = \pm\sqrt{\frac{\beta_x^*}{\beta_{xS1}}} \qquad \text{(A-28)}$$

となる。これらより、六極電磁石 $\mathrm{S_1}$ の必要な強さ（の絶対値）は、

$$K_2\left(S_1\right) = \frac{1}{2\phi\beta_{yS1}\beta_y^*}\sqrt{\frac{\beta_x^*}{\beta_{xS1}}} \qquad \text{(A-29)}$$

となる（問　これを示せ）。

μ=πの場合

μ=πの（整数倍の）場合は、μ=π/2の場合とほぼ同様のやり方で計算できる。以下に、結果のみを書き下す。衝突点から直線で s だけ進んだ点 P での

Twiss parameter を求めて、β 関数の部分だけ書くと、

$$\beta(s) = \beta_y^* + \frac{\left(s - K_2(S_1)\beta_{yS1}\beta_y^* x_1\right)^2}{\beta_y^*} - \frac{\left(K_2(S_1)\beta_{yS1}\beta_y^* x_1\right)^2}{\beta_y^*} \tag{A-30}$$

となる。この場合、waist がずれる量は$\mu=\pi/2$の場合と同じであるが、β 関数の最小値は、六極電磁石がない場合より小さくなる。また、六極電磁石 S_1 の必要な強さ（の絶対値）は$\mu=\pi/2$の場合と同じになる。